UMEÅ UNIVERSITET

Optimering av malning i en autogenkvarn

Tillämpning av responsytemetod för optimering av malningsprocessen vid LKAB KA2

Oscar Lundqvist

Examensarbete, 30 hp
Civilingenjörsprogrammet Industriell ekonomi, Data science, 300 hp
Institutionen för matematik och matematisk statistik
Vårtermin 2025

© 2025 Oscar Lundqvist
Alla rättigheter förbehållna

OPTIMERING AV MALNING I EN AUTOGENKVARN
Tillämpning av responsytemetod för optimering av malningsprocessen vid LKAB KA2

Handledare:
Per Arnqvist, Umeå universitet
Lars Esberg, LKAB
Mathias Tegel, LKAB

Examinator:
Leif Nilsson, Umeå universitet

Institutionen för matematik och matematisk statistik
Umeå universitet
901 87 Umeå, Sverige

Sammanfattning

I detta examensarbete har responsytemetodik (RSM) använts för att undersöka och optimera malningsprocessen i en autogenkvarn vid LKAB:s anläggning KA2. En central kompositdesign (CCD) användes för att planera försöken och bygga statistiska modeller för sex viktiga processparametrar: *Effekt*, *Lagertryck*, *PSI*, *P45*, *Pebblesproduktion* samt specifik energiförbrukning (*kWh/ton*).

Studien fokuserade på tre styrbara faktorer: *Varvtal*, *Ingående tonnage* och *Malstenskvot*. Särskild uppmärksamhet ägnades åt *Malstenskvoten*, som för närvarande inte styrs aktivt men visat sig ha stor påverkan på processutfallet.

De framtagna modellerna användes för att skapa överlagrade konturplottar som visualiserade samspelet mellan faktorer och responsvariabler. Analysen av dessa plottar möjliggjorde identifiering av områden där produktionen kan maximeras samtidigt som den specifika energiförbrukningen minimeras.

Resultaten visade höga förklaringsgrader för samtliga responsvariabler samt starka korrelationer mellan flera av dem. Vidare utvecklades strategier för optimering av produktionen under olika scenarier. I samtliga fall hade *Malstenskvoten* och *Varvtal* en tydlig och betydelsefull inverkan.

Nyckelord: Autogenkvarn, Autogenmalning, Försöksplanering, Responsytmetodik, Malstenskvot, Kritiskt varvtal, LKAB, Optimering

Abstract

In this thesis, response surface methodology (RSM) was applied to investigate and optimize the grinding process in an autogenous mill at LKAB's KA2 facility. A central composite design (CCD) was used to plan the experiments and develop statistical models for six key process parameters: *Power*, *Bearing pressure*, *PSI*, *P45*, *Pebble production* and Specific energy consumption (*kWh/ton*).

The study focused on three controllable factors: *Mill Speed*, *Feed*, and *Coarse oar ratio*. Special attention was given to the *Coarse oar ratio*, which is currently not actively controlled but has shown significant influence on the process outcomes.

The developed models were used to generate overlaid contour plots illustrating the interactions between factors and response variables. Analysis of these plots enabled identification of regions where production can be maximized while minimizing the specific energy consumption.

The results demonstrated high coefficients of determination for all response variables, as well as strong correlations between several of them. Furthermore, strategies for optimizing production under different scenarios were developed. In all cases, the *Coarse oar ratio* and *Mill Speed* had clear and significant impacts.

Key words: Autogenous mill, Autogenous grinding, Design of experiments, Response surface methodology, Coarse ore ratio, Critical speed, LKAB, Optimization

Förord

Jag vill ta tillfället i akt att tacka alla som har stöttat mig och bidragit till detta arbete.

Först vill jag rikta ett stort tack till mina handledare på LKAB, Lars Esberg och Mathias Tegel, som har varit ovärderliga genom hela processen. De gav mig möjligheten att utföra detta mycket intressanta arbete vid LKAB och har kontinuerligt bistått med stöd i utförandet av tester, diskussioner och tolkning av resultat. Deras gedigna kunskap om processen på KA2 har underlättat arbetet och bidragit till djupare insikter.

Jag vill även tacka hela NMT-avdelningen för det varma mottagandet och möjligheten att träffa många trevliga kollegor, vilket gjorde min vistelse i Kiruna ännu bättre.

Ett särskilt tack riktas till personalen på KA2, som vänligt tillät mig att utföra tester trots att det ibland innebar en viss störning i deras arbete, samt för deras värdefulla hjälp under försöken.

Jag vill även tacka min handledare från universitetet, Per Arnqvist, för värdefull vägledning och stöd genom hela arbetet samt för noggrann genomläsning och konstruktiv feedback på min rapport.

Sist men inte minst vill jag tacka min sambo, som har stöttat mig under hela arbetet och tagit hand om allt när jag varit upptagen med projektet.

Innehåll

1 Introduktion **1**
1.1 Företagsfakta . . . 1
1.1.1 Översiktlig processbeskrivning . . . 1
1.2 Problembakgrund . . . 1
1.3 Problembeskrivning . . . 4
1.4 Syfte och mål . . . 4
1.5 Avgränsningar i projektet . . . 4

2 Problemställning **6**
2.1 Relaterad forskning . . . 6

3 Teori **8**
3.1 Försöksplanering . . . 8
3.2 Faktoriell design . . . 8
3.3 Linjära regressionsmodeller . . . 10
3.3.1 Minsta kvadratmetoden . . . 10
3.3.2 Residualer . . . 11
3.3.3 Estimering av varians . . . 11
3.4 Frihetsgrader . . . 11
3.5 Hypotesprövning i Linjära regressionsmodeller . . . 12
3.5.1 Test för regressionens signifikans . . . 12
3.5.2 Test av individuella koefficienter . . . 13
3.6 Mått på modellens passform . . . 13
3.6.1 R-kvadrat . . . 13
3.6.2 Justerat R-kvadrat . . . 13
3.6.3 Prediktivt R-kvadrat . . . 14
3.6.4 Modelldiagnos . . . 14
3.6.5 Test för bristande passform . . . 16
3.7 Responsytemetod . . . 16
3.7.1 Centrerad kompositdesign . . . 17
3.8 Korrelation . . . 18

4 Metod **19**
4.1 Beskrivning av nuvarande kvarnstyrning . . . 19
4.2 Responsvariabler . . . 20
4.3 Faktorer och faktornivåer . . . 21
4.4 Historisk processdata . . . 22
4.5 Responsytemetod och val av designmatris . . . 22
4.6 Genomförande av försöksplan . . . 23
4.7 Statistisk programvara . . . 24

5 Resultat **26**
5.1 Korrelationsanalys . . . 26
5.2 Effekt . . . 26
5.3 Lagertryck . . . 30

5.4 PSI . . . 31
5.5 P45 . . . 32
5.6 Pebblesproduktion . . . 32
5.7 Specifik energiförbrukning (kWh/Ton) . . . 33
5.8 Överlagda konturplottar . . . 34
5.8.1 Maximera produktionen . . . 34
5.8.2 Minimera specifik energiförbrukning . . . 37

6 Diskussion **41**
6.1 Korrelation mellan responsvariabler . . . 41
6.2 Effekt . . . 41
6.3 Lagertryck . . . 42
6.4 PSI . . . 43
6.5 P45 . . . 44
6.6 Pebblesproduktion . . . 44
6.7 Specifik energiförbrukning (kWh/Ton) . . . 45
6.8 Maximera produktionen . . . 46
6.9 Minimera specifik energiförbrukningen . . . 47

7 Slutsatser **49**
7.1 Framtida rekommendationer . . . 53

8 Referenser **54**

Bilagor **55**
Bilaga A: Designmatris . . . 55
Bilaga B: Körordning . . . 56
Bilaga C: Tidsintervall för mätpunkter . . . 57
Bilaga D: Mätdata . . . 58
Bilaga E: Kompletterande resultat för *Effekt* . . . 59
Bilaga F: Kompletterande resultat för *Lagertryck* . . . 60
Bilaga G: Kompletterande resultat för *PSI* . . . 66
Bilaga H: Kompletterande resultat för *P45* . . . 72
Bilaga I: Kompletterande resultat för *Pebblesproduktion* . . . 78
Bilaga J: Kompletterande resultat för *kWh/Ton* . . . 82
Bilaga K: Kompletterande figurer för *Maximera produktionen* . . . 87
Bilaga L: Kompletterande figurer för *Minimera specifika energiförbrukningen* . . . 89

1 Introduktion

I detta avsnitt presenteras bakgrundsinformation om företaget, information kopplad till examensarbetet, samt syfte och mål med projektet.

1.1 Företagsfakta

Luossavaara-Kiirunavaara Aktiebolag (LKAB), grundat 1890, är ett av Sveriges äldsta industriföretag. Bolaget, med dotterbolag, producerar och säljer hållbara järnmalms-, mineral- och specialprodukter till en internationell marknad. LKAB har verksamhet i tolv länder och sysselsätter över 5000 personer världen över (LKAB, u.å.a).

Den huvudsakliga verksamheten, inklusive gruvor och förädlingsverk, är lokaliserad i Kiruna, Malmberget och Svappavaara. I Kiruna och Malmberget återfinns världens två största underjordsgruvor, medan malmen i Svappavaara bryts i ett dagbrott. LKAB står för cirka 80 % av all järnmalmsproduktion inom EU och är en ledande aktör i omställningen mot en mer hållbar järn- och stålindustri (LKAB, u.å.b).

1.1.1 Översiktlig processbeskrivning

Förädlingsprocessen inleds med brytning av järnmalm, vilken i underjordsgruvorna sker genom skivrasbrytning. Den brutna malmen krossas och genomgår därefter flera steg för att omvandlas till järnmalmspellets och fines.

I det första steget, sovring, sorteras malmen och gråberg avlägsnas, samtidigt som malmen krossas till mindre fraktioner. Förädlingssteget, anrikning, innebär att järnmalmen finmals och förädlas genom att föroreningar såsom gråbergsmineraler och apatit avlägsnas. Den resulterande slurryn, vilket är en blandning av mald järnmalm och vatten, kompletteras sedan med olika tillsatser för att få önskad kemi i den färdiga produkten.

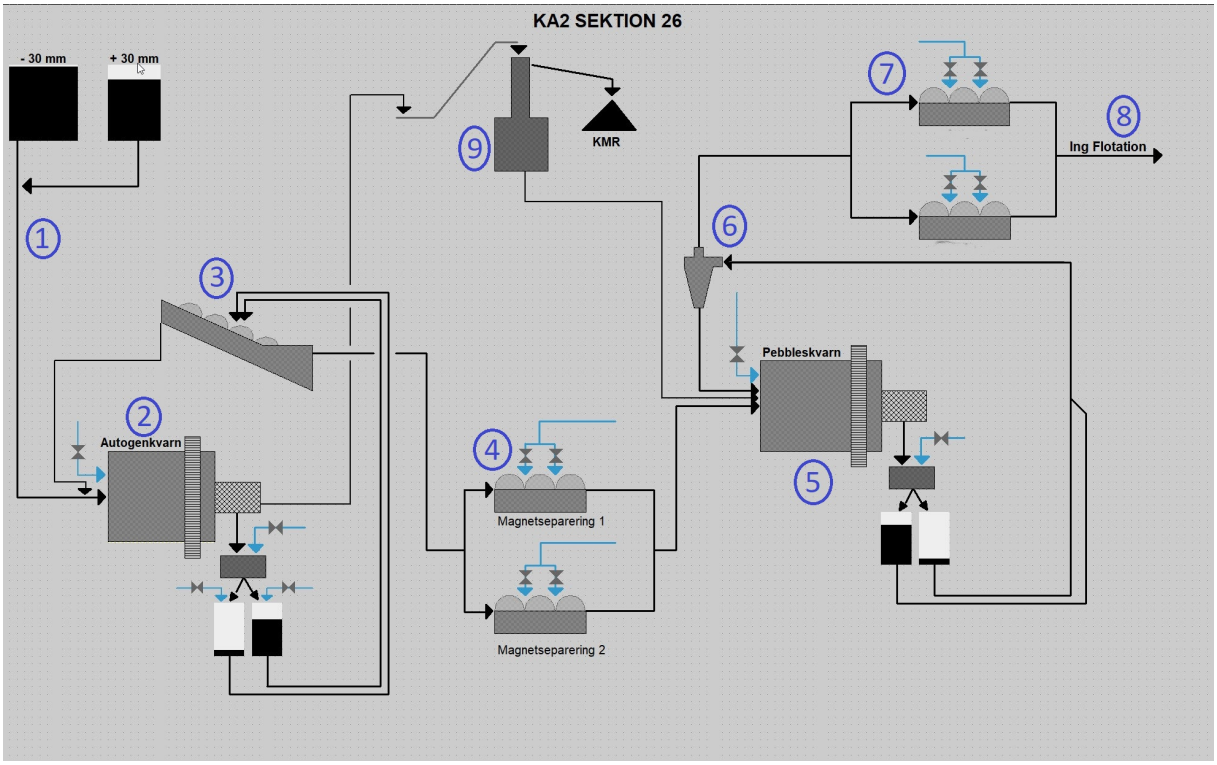
I det sista momentet, pelletisering, formas kulor av slig, vilket är filtrerad slurry. Dessa pellets värms sedan upp så att järnmalmspartiklarna delvis sintrar samman, vilket ger en produkt med önskade egenskaper (LKAB, u.å.b).

1.2 Problembakgrund

Kiruna Anrikningsverk 2 (KA2) är det andra steget i malmförädlingsprocessen. Anläggningen är indelad i tre sektioner (25, 26 och 27), där både sektion 26 och 27 har en autogenkvarn (primärkvarn), pebbleskvarn (sekundärkvarn), skruvklasserare och hydrocyklon. Sektion 25 används däremot för att producera tillsatsmedel.

Autogenmalning är en process där malmen själv fungerar som malmedia genom att reducera sin egen partikelstorleksfördelning via nötning och krossning. Processen är komplex då flera faktorer påverkar hur effektivt materialet mals. En viktig faktor är storleksfördelningen på den inkommande malmen, som delvis kan styras genom att justera förhållandet mellan grovt material (större än 30 mm, benämnt +30 mm) och fint material (mindre än 30 mm, benämnt –30 mm). Den grova fraktionen (+30 mm) spelar en viktig roll genom att hjälpa till att mala det finare materialet i processen.

Andra betydelsefulla faktorer är malmens mineralogiska egenskaper, såsom hårdhet och sprödhet. Till skillnad från storleksfördelningen är dessa egenskaper inte möjliga att påverka i processen, vilket ställer krav på att kvarnens driftförhållanden anpassas efter variationer i materialets sammansättning. Detta innebär också att optimala driftförhållanden förändras över tid beroende på malmens beskaffenhet (Alatalo & Pålsson, 2011).



Figur 1: Visualisering av processflödet i KA2.

I figur 1 visualiseras processens flöde, med de olika processtegen markerade. Steg 1–8 beskrivs i punkterna nedan.

1. Två olika typer av fickor förvarar rågodset (malmen) till malningsprocessen. En av fickorna förvarar grovt material (+30mm gods), och den andra förvarar fint material (-30mm gods). En kvot mellan det grova och fina godset transporteras sedan in via en bandtransportör till autogenkvarnen.

2. Autogenkvarnen utgör det första malningssteget i processen. Förutom rågodset som transporteras in via bandtransportören tillsätts även vatten i processen. Det utående godset från autogenkvarnen består av $< 6mm$ gods blandat med vatten (även kallad slurry), och pebbles vilket är stenar i storleken $6 - 30mm$. Pebblesen förvaras i pebblesfickan (9).

3. Den utgående slurryn från autogenkvarnen transporteras sedan till skruvklasseraren. Denna sorterar fint mald produkt (ungefär $80\% < 150\mu m$) från den grova produkten. Den grova produkten returneras

till autogenkvarnen (2).

4. Den fina produkten från skruvklasseraren går vidare till primärseparering. Denna består av svagmagnetiska trummor, och när dessa roterar avlägsnas gråbergsmineraler från produkten. Den magnetseparerade produkten går sedan vidare till pebbleskvarnen (5).

5. Pebbleskvarnen utgör det andra malningssteget i processen. Utöver den magnetseparerade produkten tillsätts även pebbles från (9), vilket används som malningsmedia i kvarnen. Överskottet av pebbles blir KMR (Kiruna Mill Reject), vilket säljs som en biprodukt.

6. Det utgående godset från pebbleskvarnen, $< 4mm$, går sedan vidare till hydrocyklonerna. Detta steg avskiljer de fina partiklarna från de grova, där de grova partiklarna returneras till pebbleskvarnen. De fina partiklarna, vilket nu är färdigmald produkt, går vidare till sekundärseparering.

7. I sekundärsepareringen, avkiljs på samma sätt som i primärsepareringen, gråbergsmineraler från produkten. Den magnetseparerade produkten går vidare till floationen.

8. Produkten från både sektion 26 & 27 går genom en gemensam fördelare till floationen, vars syfte är att minska mängden fosfor hos produkten. Ett sista magnetsepareringssteg genomförs innan produkten leds med självfall till slurrytanken på kulsinterverket (Skoglind & Jokinen, 2005).

För att erhålla en stabil kvarnprocess krävs att parametrarna *Lagertryck*, *Effekt* och *PSI* styrs mot sina respektive målvärden inom angivna toleransgränser. Här beskriver *Effekt* energin som autogenkvarnen förbrukar och *Lagertryck* indikerar dess last eller fyllnadsgrad. *PSI* representerar en punkt på en storleksfördelningskurva, där andelen material som är mindre än $45\mu m$ används som ett mått på finleken.

Målvärdet för *Effekt*, som är en uppmätt processvariabel, fastställs utifrån de uppmätta värdena på *Lagertryck* och *PSI*, medan styrvärdet för *Ingående tonnage* bestäms med hänsyn till samtliga tre parametrar: *Effekt*, *Lagertryck* och *PSI*.

De styrbara parametrar som påverkar processen benämns fortsättningsvis som faktorer och inkluderar *Varvtal*, *Malstenskvot*, *Spädvatten* samt *Ingående tonnage*. Parametrarna *Effekt*, *Lagertryck*, *Pebblesproduktion*, *kWh/ton*, *PSI* och *Yta* benämns som responsvariabler. Processen styrs även mot specifika kvalitetskrav på den slutgiltiga malningen, där *Yta* beskriver förhållandet mellan yta och volym, och *PSI* (Particle Size Indicator) anger andelen partiklar som är mindre än en viss storlek.

Under de senaste åren har samtliga autogenkvarnar i KA2 försetts med varvtalsstyrning. Syftet har varit att minska förbrukningen av malsten, erhålla en lägre specifik energiförbrukning och uppnå en högre genomsättning, vilket till stor del har uppnåtts. Autogenmalningsprocessen är dock mycket komplex, främst på grund av den varierande rågodskvaliteten.

Även om KA2 har kvarnstyrning som reglerar varvtal och inmatning för att maximera genomsättning och malningseffektivitet, tar denna styrning inte hänsyn till interaktioner mellan faktorer eller korrelationer mellan responsvariabler. Därmed finns en stor förbättringspotential i att identifiera samspelet mellan faktorer, korrelationerna mellan responsvariabler och de optimala nivåerna för varje faktor.

1.3 Problembeskrivning

För att förbättra och vidareutveckla styrningen av autogenkvarnen i KA2 krävs en djupare förståelse för hur processparametrarna, både faktorer och responsvariabler, samverkar. De samspelseffekter som påverkar autogenmalningen är inte tillräckligt kartlagda, särskilt då varvtalsstyrningen är en relativt ny implementering inom LKAB.

Ett fullskaligt designat faktorförsök behövs för att identifiera och kvantifiera faktorernas inverkan på processen. Genom en ökad förståelse för systemets dynamik kan mer effektiva produktionsstrategier utvecklas, vilket i sin tur kan bidra till ökad processtabilitet, energieffektivitet och produktkvalitet.

1.4 Syfte och mål

Syftet med projektet är att genomföra en omfattande försöksplanering för att identifiera samspel mellan faktorerna och deras påverkan på responsvariablerna. Projektet syftar också till att fastställa optimala nivåer för faktorerna, med målet att resultaten ska kunna användas som underlag för att förbättra styrningen av autogenkvarnen vid Kiruna Anrikningsverk 2.

Projektets övergripande mål är att öka kunskapen om malningsprocessen och optimera driften med avseende på genomsättning, energieffektivitet, malstenskvot och pebblesproduktion, samtidigt som responsvariablerna *Effekt*, *Lagertryck* och *PSI* hålls inom fastställda toleransgränser.

- **Optimera *Varvtalet***: Identifiera optimal *Varvtals*-nivå med hänsyn till responsvariablerna. Undersöka hur malningen påverkas vid låga *Varvtals*-nivåer.
- **Optimera *Malstenskvoten***: Analysera hur *Malstenskvoten* påverkar responsvariablerna och ta fram en körstrategi.
- **Interaktioner och korrelationer**: Identifiera interaktioner mellan faktorer samt korrelationer mellan responsvariabler, och använda denna kunskap för att fastställa lämpliga faktornivåer.
- **Optimera *Pebblesproduktionen*:** Undvika över- eller underproduktion av pebbles genom justering av faktornivåer.
- **Minska den specifika energiförbrukningen**: Fastställa faktornivåer som bidrar till lägre specifik energiförbrukning (*kWh/ton*).
- **Öka produktionen av slurry**: Sträva efter ökad genomsättning i processen samtidigt som en hög produktkvalitet säkerställs.

1.5 Avgränsningar i projektet

Projektet kommer att fokusera på faktorerna *Varvtal*, *Malstenskvot* och *Ingående tonnage*. *Spädvatten* behandlades inte för att säkerställa att alla försök kunde genomföras inom den fastlagda tidsramen.

Vidare utfördes försöken med fokus på autogenkvarnens faktorer, men vissa responsvariabler, såsom *PSI* och *Yta*, påverkades även av pebbleskvarnen. Tester utfördes på sektion 26 och inte på båda sektionerna, vilket innebär att produktionen av järnmalmsslurry från sektion 26 inte kan mätas separat eftersom båda

sektionernas flöden sammanslås i flotationen. För detta specifika projekt tolkas en ökad nivå av faktorn *Ingående tonnage* som en ökad produktion av järnmalmsslurry.

Projektet tar inte hänsyn till cirkulerande laster, det vill säga det grova materialet från skruvklassaren (hydrocyklonerna) som återcirkuleras till autogenkvarnen (pebbleskvarnen).

Eftersom projektet är tidsbegränsat baseras resultaten på de förutsättningar som gällde vid genomförandet av testerna. Detta innebär att resultaten inte fullt ut kan tillämpas vid förändringar i rågodskvalitén.

2 Problemställning

I detta examensarbete kommer följande frågor att försöka besvaras:

- **Varvtal:** Finns det en optimal *Varvtalsnivå* för alla responsvariabler? Vad är den optimala *Varvtalsnivån* för varje specifik responsvariabel? Hur påverkas responsvariablerna av en lägre *Varvtalsnivå* jämfört med den nivå som används idag?
- **Malstenskvot:** Hur påverkar *Malstenskvoten* responsvariablerna? Hur kan en körstrategi utformas för att styra *Malstenskvoten* på ett sätt som leder till optimala responsvärden?
- **Maximera produktionen:** För att maximera produktionen av järnmalmslurry, vilka kombinationer av nivåer för faktorerna *Varvtal* och *Malstenskvot* tillåter högsta möjliga nivå av *Ingående tonnage*, samtidigt som responsvariablerna *Effekt*, *Lagertryck* och *PSI* hålls inom sina toleransgränser?
- **Specifik energiförbrukning:** Vilka faktornivåkombinationer resulterar i den lägsta specifika energiförbrukningen (*kWh/Ton)*? Är det möjligt att minska den specifika energiförbrukningen utan att kompromissa med produktionsvolymen eller kvaliteten (PSI)?
- **Pebblesproduktion:** Hur påverkas *Pebblesproduktionen* av primärkvarnens inställningar, och hur kan dess inställningar anpassas för att möta behovet hos sekundärkvarnen?
- **Interaktioner och korrelationer:** Vilka interaktioner finns mellan faktorerna, och hur korrelerar responsvariablerna med varandra?

2.1 Relaterad forskning

Alatalo & Pålson (2011) undersöker hur volym% fast (volymen av det fasta materialet i förhållande till flödets totala volym), kvarnfyllnadsgrad och varvtal påverkar dynamiken i en pebbleskvarn. Studien genomfördes med en experimentell design (försöksplan) vid LKAB:s pilotanläggning i Malmberget. Då pilotanläggningen består av en mindre kvarn kan resultaten dock inte nödvändigtvis generaliseras till fullskaliga kvarnar, eftersom viss dynamik kan gå förlorad i överföringen till större skala.

I försöket varierades volym% fast mellan 23% och 27%, kvarnfyllnadsgraden mellan 35% och 45%, samt varvtalet mellan 65% och 85%. Under experimentet mättes bland annat andelen partiklar $< 45\mu m$, effekt (kW), specifik yta (cm^2/cm^3), malbarhet (kg $< 45\mu m$/kWh) samt pebbleskonsumtion (kg/kWh).

Resultaten visade att varvtalet hade en signifikant inverkan på både andelen partiklar $< 45\,\mu m$ och malbarheten, där ett lägre varvtal visade sig vara fördelaktigt. Kvarnfyllnadsgraden hade en signifikant påverkan på effekt, specifik yta och pebbleskonsumtion. En högre fyllnadsgrad resulterade i en finare specifik yta (finare nedmalning), högre effektuttag och ökad pebbleskonsumtion. Vidare observerades en signifikant interaktion mellan varvtal och fyllnadsgrad, där kombinationen av hög fyllnadsgrad och lågt varvtal gav störst andel fina partiklar ($< 45\mu m$) och högst malbarhet. Volym%fast visade däremot ingen signifikant effekt i detta försök, vilket kan bero på den begränsade nivåskillnaden mellan de två testade nivåerna.

Hahne m.fl. (2003) undersöker hur variationer i malmens egenskaper påverkar prestandan i en autogenkvarn. Testerna genomfördes vid LKAB:s pilotanläggning, med särskilt fokus på malmens hårdhet och storleksfördelning. Malm provtogs från fyra olika platser i produktionssystemet, och dessa prover låg till grund för de

tester som utfördes i kvarnen.

Utifrån den insamlade malmen skapades fem olika kombinationer, baserade på avvikelser från medelvärdet i hårdhet och partikelstorlek:

- medelhård malm med medel storleksfördelning,
- hög hårdhet med medel storleksfördelning,
- låg hårdhet med medel storleksfördelning,
- hög hårdhet och grov storleksfördelning, samt
- låg hårdhet och fin storleksfördelning.

Baserat på studiens siktfördelningskurvor uppskattas P80-värdena till cirka <16 mm för fin fördelning, <40 mm för medel, och <80 mm för grov. P80 representerar den partikelstorlek under vilken 80% av materialet passerar.

Resultaten visade att låg hårdhet i kombination med liten storleksfördelning resulterade i en ökad produktion av pebbles, men samtidigt en minskad mängd finmalt material. Motsatt effekt uppnåddes vid hög hårdhet i kombination med stor storleksfördelning, där mindre pebbles och mer finmaterial producerades. I det fall då endast hårdheten ökade (vid konstant storleksfördelning) observerades en ökad pebblesproduktion och mindre finmalt material. Detta antyder att storleksfördelningen är den mest avgörande parametern, där en bredare storleksfördelning tycks vara mer fördelaktig för att minska pebblesproduktionen och öka andelen finmalet material.

3 Teori

Detta avsnitt ger en teoretisk grund för de metoder som tillämpats i analysen. Inledningsvis introduceras begrepp relaterade till försöksplanering och faktoriell design, följt av en genomgång av linjära regressionsmodeller och relaterade begrepp såsom minsta kvadratmetoden, residualer och frihetsgrader. Därefter beskrivs hypotesprövning i regressionsmodeller, inklusive tester för både modellens och enskilda koefficienters signifikans. Avsnittet behandlar även mått på modellens anpassning, såsom R^2, och metoder för modelldiagnostik. Mot slutet introduceras responsytmetodik med central komposit design (CCD), samt korrelation som stöd för tolkning av samband mellan variabler.

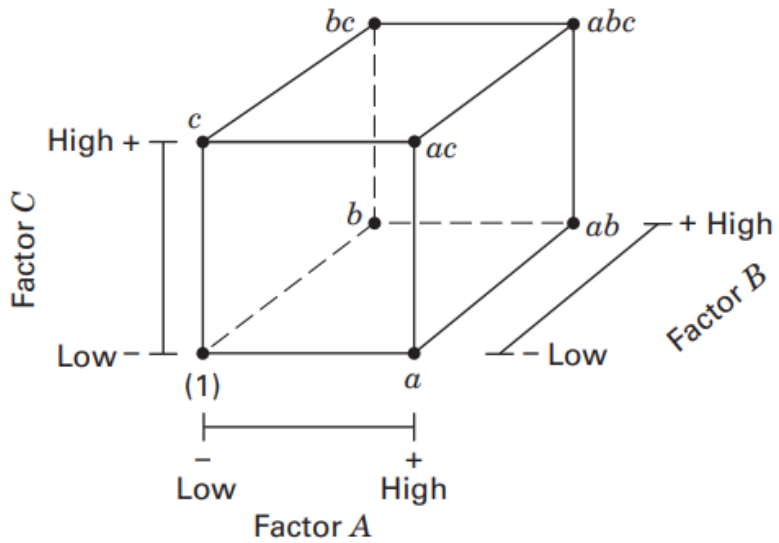
3.1 Försöksplanering

Försöksplanering, eller experimentell design, är en metod där förändringar görs i de ingående faktorerna för att undersöka hur dessa påverkar en eller flera responsvariabler. Målet är att få ut så mycket information som möjligt från ett så litet antal försök som möjligt. En fördel med faktoriella försök är att faktorer varieras samtidigt istället för en i taget, vilket minskar både tidsåtgång och antalet nödvändiga tester.

Syftet med försöksplanering kan vara att identifiera interaktioner mellan faktorer, fastställa vilka faktorer som är viktigast, optimera processer, kvalitetssäkra produktion eller utveckla robusta produkter (Telford, 2007).

3.2 Faktoriell design

Faktoriella designer används för att undersöka effekterna av två eller mer faktorer, antalet faktorer benämns som k. Vidare har varje faktor minst två nivåer och under genomförandet av den faktoriella designen kommer alla kombinationer av faktorerna att prövas (Montgomery, 2017, s. 180). Om faktorerna har två nivåer, en hög nivå (+) och en låg nivå (-), innebär detta att designen har $2 \times 2 \times 2 \times \ldots = 2^k$ olika kombinationer (Montgomery, 2017, s. 231). Figur 2 illustrerar den geometriska vyn av en faktoriell design med tre faktorer och två nivåer (2^3).



Figur 2: Geometrisk vy av en 2^3 faktoriell design (Montgomery, 2017, s.240).

Tabell 1 visar designmatrisen för en 2^3 faktoriell design, med två olika notationer för faktorkombinationerna. Den första är då $(-)$ och $(+)$ används, vilket indikerar låga och höga nivåer för varje faktor. Denna metod kallas *geometrisk kodning*. Den andra metoden använder små bokstäver för att beskriva faktorkombinationerna (Montgomery, 2017, s. 240).

Tabell 1: Designmatris för en 2^3 faktoriell design.

Körordning	**A**	**B**	**C**	**Etiketter**
1	-	-	-	(1)
2	-	-	+	a
3	-	+	-	b
4	-	+	+	ab
5	+	-	-	c
6	+	-	+	ac
7	+	+	-	bc
8	+	+	+	abc

Följande ekvationer används för att beräkna de uppskattade huvud- och interaktionseffekter (Montgomery, 2017, s.241):

Genomsnittlig effekt av faktor A:

$$A = \bar{A}_{A^+} - \bar{A}_{A^-} = \frac{1}{4n}[a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc].$$

Genomsnittlig effekt av faktor B:

$$B = \bar{B}_{B^+} - \bar{B}_{B^-} = \frac{1}{4n}[b + ab + bc + abc - a - c - ac].$$

Genomsnittlig effekt av faktor C:

$$C = \bar{C}_{C^+} - \bar{C}_{C^-} = \frac{1}{4n}[c + ac + bc + abc - a - b - ab].$$

Tvåfaktorsinteraktion mellan faktor A och B:

$$AB = \frac{1}{4n}[abc - bc + ab - b - ac + c - a + (1)].$$

Tvåfaktorsinteraktion mellan faktor A och C:

$$AC = \frac{1}{4n}[(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc].$$

Tvåfaktorsinteraktion mellan faktor B och C:

$$BC = \frac{1}{4n}[(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc].$$

3.3 Linjära regressionsmodeller

Linjära regressionsmodeller används för att estimera sambandet mellan en responsvariabel och en eller flera faktorer (Montgomery, 2017, s. 461). Den generella formen för en linjär regressionsmodell är:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

där $x_1, x_2, \ldots, x_k$ är faktorerna, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ är regressionskoefficienterna och ε är feltermen. Regressionskoefficienterna representerar den förväntade förändringen i responsvariabeln per enhetsförändring i respektive faktor, under förutsättning att alla andra faktorer hålls konstanta (Montgomery, 2017, s.461).
Modellen kan också utvidgas för att inkludera interaktionstermer och polynomtermer av högre grad. En andra ordningens modell med interaktioner kan skrivas som:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon.$$

3.3.1 Minsta kvadratmetoden

För att estimera regressionskoefficienterna används minsta kvadratmetoden (OLS). Notationen nedan används för att representera modellen:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Här är $\boldsymbol{y}$ en $n \times 1$-vektor av observerade värden, $\mathbf{X}$ en $n \times p$-matris av faktornivåer, $\boldsymbol{\beta}$ en $p \times 1$-vektor av regressionskoefficienter och $\boldsymbol{\varepsilon}$ en $n \times 1$-vektor av feltermer.

Vektorn ($\hat{\boldsymbol{\beta}}$) bestäms genom att minimera summan av kvadrerade fel:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Genom att derivera L med avseende på $\boldsymbol{\beta}$ och sätta derivatan lika med noll erhålls de uppskattade koefficienterna $\hat{\boldsymbol{\beta}}$:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\mathbf{X}^T\mathbf{y} + 2\mathbf{X}^T\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}.$$

Detta leder till lösningen:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}.$$

De anpassade (eller predikterade) värdena $\hat{\boldsymbol{y}}$ ges av:

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

3.3.2 Residualer

Residualer är skillnaden mellan det observerade värdet och det anpassade värdet, definierat som:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

där n är antalet observationer (Montgomery, 2017, s.464).

3.3.3 Estimering av varians

Den skattade variansen i regressionsmodellen ges av:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-p}$$

där n är antalet observationer, p är antalet parametrar i modellen och residualsumma av kvadrater (SSE) definieras som:

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e}.$$

Här betecknar $\boldsymbol{e}$ residualvektorn, det vill säga skillnaden mellan observerade och anpassade värden, vilket även beskrivs i avsnitt 3.3.2.

3.4 Frihetsgrader

Frihetsgrader defineras som antalet oberoende element som är fria att variera (Montgomery, 2017, s.30). I en variansanalys (ANOVA) används frihetsgrader för att skatta variansen i data och för att bedöma signifikansen av parametrar i modellen.

3.5 Hypotesprövning i Linjära regressionsmodeller

I multipel linjär regression används hypotesprövning för att avgöra om modellens parametrar är signifikanta. För att dessa tester ska vara giltiga krävs att felen ε_i är normala och oberoende fördelade med väntevärde noll och konstant varians. Om normalfördelningsantagandet är uppfyllt, kan olika statistiska test användas för att pröva om faktorerna har en signifikant påverkan på responsvariabeln (Montgomery, 2017, s.473).

3.5.1 Test för regressionens signifikans

Testet för signifikans av regressionsmodellen syftar till att avgöra om ett linjärt samband existerar mellan responsvariabeln y och en uppsättning av faktorer $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (Montgomery, 2017, s.473). Hypoteserna är:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$$
$$H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ för åtminstone ett } j$$

Om nollhypotesen förkastas innebär detta att minst en av faktorerna bidrar signifikant till modellen. Testproceduren innebär en variansanalys (ANOVA) där den totala kvadratsumman *SST* delas upp i en kvadratsumma som beror på modellen och en kvadratsumma som beror på residualer:

$$SST = SSR + SSE$$

Där *SST*, *SSR* och *SSE* beräknas enligt följande:

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$
$$SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$
$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

För att testa H_0 beräknas testvariabeln:

$$F_0 = \frac{SSR/k}{SSE/(n-k-1)} = \frac{MSR}{MSE}$$

där F_0 är F-fördelat med k och $n-k-1$ frihetsgrader. n är antalet observationer och k är antalet parametrar i regressionsmodellen. *MSR* (Mean Square Regression) beskriver hur mycket variation som i genomsnitt förklaras av modellen per parameter, medan *MSE* (Mean Square Error) beskriver hur mycket variation som i genomsnitt återstår i residualerna.

Nollhypotesen H_0 förkastas om testvariabeln F_0 överstiger det kritiska värdet $F_{\alpha,k,n-k-1}$ eller om p-värdet är mindre än signifikansnivån α.

3.5.2 Test av individuella koefficienter

För att bedöma de individuella regressionskoefficienternas betydelse utförs hypotestester. Detta är viktigt, eftersom en addering av en ny variabel alltid kommer att öka *SSR* och minska *SSE*. Däremot kan en icke-signifikant variabel öka *MSE*, vilket innebär att modellen blir mindre effektiv utan att förbättra förklaringskraften. Hypotesen för att testa om en regressionsparameter bidrar till modellen är (Montgomery, 2017, s. 475):

$$H_0 : \beta_j = 0$$
$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

Om nollhypotesen inte förkastas innebär det att faktorn x_j kan exkluderas från modellen. Testvariabeln för hypotesen är:

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}}$$

där C_{jj} är det diagonala elementet i $(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}$ som är associerat med regressionskoefficienten $\hat{\beta}_j$. Nollhypotesen förkastas om $|t_0| > t_{\alpha/2,n-k-1}$, där $t_{\alpha/2,n-k-1}$ är det kritiska värdet från t-fördelningen med $n-k-1$ frihetsgrader vid signifikansnivån α. Alternativt förkastas nollhypotesen om *p-värdet* för t_0 är mindre än signifikansnivån α. Observera att detta är ett partiellt test, eftersom regressionskoefficienten β_j beror på alla andra regressionsvariabler x_i $(i \neq j)$ som ingår i modellen.

3.6 Mått på modellens passform

3.6.1 R-kvadrat

R-kvadrat (R^2) beskriver hur stor del av variationen i responsvariabeln y som förklaras av modellen med faktorerna $x_1, x_2, \ldots, x_k$ i modellen och beräknas som (Montgomery, 2017, s.474):

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

R^2 varierar mellan 0 och 1, där ett högre värde indikerar att en större andel av variationen i responsvariabeln förklaras av modellen.

3.6.2 Justerat R-kvadrat

Ett ofta mer användbart mått än *R-kvadrat* är *justerat R-kvadrat*. Eftersom R^2 alltid ökar när fler termer adderas, även om dessa inte signifikant bidrar till att förklara variationen i responsvariabeln y, kan justerat R^2 ge en mer rättvis bild av modellens förklaringsförmåga. Till skillnad från R^2 tar justerat R^2 hänsyn till antalet faktorer i modellen, där en icke-signifikant faktor tenderar att minska justerat R^2, vilket gör att måttet bättre speglar modellens faktiska förklaringsförmåga (Montgomery, 2017, s.475).

$$R^2_{\text{justerat}} = 1 - \frac{SSE/(n-p)}{SST/(n-1)} = 1 - \frac{n-1}{n-p}(1-R^2)$$

På samma sätt som R^2 varierar justerat R^2 mellan 0 och 1, där ett högre värde indikerar att modellen förklarar variationen i responsvariabeln bättre.

3.6.3 Prediktivt R-kvadrat

Prediktivt R^2 används för att bedöma modellens prediktiva förmåga och kan tolkas som en variant av R^2 som tar hänsyn till modellens förmåga att förutsäga nya observationer (Montgomery, 2017, s.482). Det beräknas som:

$$Prediktivt\ R^2 = 1 - \frac{PRESS}{SST}$$

där *PRESS* (Prediction Error Sum of Squares) definieras som:

$$PRESS = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e_i}{1 - h_{ii}} \right)^2$$

och där h_{ii} är det *i:te* diagonala elementet av hattmatrisen:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T.$$

SST är den totala kvadratsumman och definieras som:

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2.$$

Ett högt *prediktivt* R^2 indikerar att modellen har god prediktiv förmåga, medan ett lågt värde tyder på att modellen inte generaliserar väl till nya observationer.

3.6.4 Modelldiagnos

För att bedöma om regressionsmodellen är lämplig används residualdiagram (Montgomery, 2017, s.78). En modell anses vara lämplig om (1) residualerna är normalfördelade, (2) residualerna har konstant (men okänd) varians och (3) residualerna är oberoende.

Normalfördelningsantagandet (1) kan granskas genom att skapa ett histogram över residualerna. Om histogrammet liknar ett stickprov från en normalfördelning med centrum runt noll, anses antagandet $N(0, \sigma^2)$ uppfyllt. Vid små stickprov kan dock histogrammets form variera avsevärt, vilket inte nödvändigtvis innebär ett brott mot normalitetsantagandet. För att bättre bedöma residualernas fördelning används ofta en normalfördelningsplott (QQ-plot). Om residualerna är normalfördelade bör punkterna i QQ-plottet ligga längs en rät linje.

En normal QQ-plot kan även användas för att identifiera potentiella uteliggare. Om en residual avviker markant från linjen kan detta tyda på en uteliggare. För att ytterligare verifiera detta kan standardiserade residualer användas:

$$d_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{MSE}}$$

Om felen är $N(0, \sigma^2)$, bör de standardiserade residualerna approximeras av en normalfördelning med väntevärde noll och varians ett. Därmed bör cirka 95% av residualerna ligga inom två standardavvikelser från väntevärdet, och nästan alla bör ligga inom tre standardavvikelser. Om en residual överstiger tre standardavvikelser från väntevärdet kan detta tyda på en uteliggare.

För att verifiera antagandet om konstant varians (2) kan residualerna plottas mot de anpassade värdena. Om variansen är konstant bör residualdiagrammet inte visa något systematiskt mönster där spridningen av residualerna ökar eller minskar med de anpassade värdena. Ett sådant mönster skulle indikera heteroskedasticitet.

Slutligen verifieras residualernas oberoende (3) genom att plotta dem mot körordningen. Om residualerna är oberoende bör det inte finnas något systematiskt mönster i plottningen, utan residualerna bör vara slumpmässigt fördelade utan tydlig trend eller autokorrelation.

Normalfördelningsantagandet kan även testas med ett formellt test, vilket beskrivs nedan.

Test av normalfördelningsantagandet

Det finns flera typer av tester för normalfördelningsantagandet, men ett av de vanligaste testerna är *Shapiro-Wilk* (Mishra m.fl., 2019). Detta test är också rekommenderat för små data-set ($n < 50$).

Detta test prövar hypoteserna:

- H_0: Data följer en normalfördelning
- H_1: Data följer inte en normalfördelning

Detta test antar att observationerna är oberoende och likafördelade med en kontinuerlig fördelningsfunktion $F(x)$, samt att väntevärdet μ och variansen σ^2 är okända (Taeger & Kuhnt, 2014).

Teststatistiken beräknas som:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} (x_{(i)} - \bar{x})^2}$$

Där

- $x_{(i)}$ är det ordnade (sorterade) observationsvärdena
- $\bar{x}$ är medelvärdet av data
- a_i är vikter som beror på den förväntade normalfördelningen
- n är antalet observationer

Vikterna a_i beräknas som:

$$(a_1, \ldots, a_m) = \frac{m^T V^{-1}}{\sqrt{m^T V^{-1} V^{-1} m}}$$

Där $m = (m_1, \ldots, m_n)$ är de förväntade medelvärdena och V är kovariansmatrisen för dessa medelvärden.

Nollhypotesen H_0 förkastas om det observerade värdet W är mindre än det kritiska värdet w_α, alternativt om $p = P(W < w_\alpha) < \alpha = 0.05$.

3.6.5 Test för bristande passform

Vid regressionsanalys kan den totala residualkvadratsumman (SSE) delas upp i två komponenter: kvadratsumman för ren felvariation ($SSPE$) och kvadratsumman för bristande anpassning ($SSLOF$):

$$SSE = SSPE + SSLOF$$

Den rena felvariationen ($SSPE$) beräknas genom att analysera spridningen mellan upprepade mätningar vid samma nivå av de oberoende variablerna:

$$SSPE = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

där $\bar{y}_i$ är medelvärdet av de n_i observationerna vid nivå x_i.

Kvadratsumman för bristande anpassning ($SSLOF$) beräknas som en viktad summa av de kvadrerade avvikelserna mellan de observerade medelvärdena $\bar{y}_i$ och de skattade värdena från modellen $\hat{y}_i$:

$$SSLOF = \sum_{i=1}^{m} n_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$$

Om dessa avvikelser är stora tyder det på att modellen inte fångar den underliggande relationen väl, vilket kan indikera att den verkliga regressionsfunktionen inte är linjär.

För att testa om modellen har en signifikant bristande anpassning används ett F-test där teststorheten definieras som:

$$F_0 = \frac{SSLOF/(m-p)}{SSPE/(n-m)} = \frac{MS_{LOF}}{MS_{PE}}$$

Om $F_0 > F_{\alpha,m-p,n-m}$, finns evidens för att modellen inte är lämplig, och en bättre modell bör övervägas (Montgomery, 2017, s.485).

3.7 Responsytemetod

Responsytemetod (på engelska: Response Surface Methodology, förkortas RSM) är en ansamling av matematiska och statistiska verktyg för att analysera och modellera en responsvariabel som påverkas av två eller flera faktorer, där syftet är att optimera responsvariabeln (Montgomery, 2017, s. 490).

Responsvariabel modelleras som en funktion av faktorerna:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \varepsilon$$

där ε är feltermen som observerats i responsvariabeln. Om det förväntade värdet av responsvariabeln modelleras, kommer feltermen att försvinna eftersom $E(\varepsilon) = 0$:

$$E(y) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

Där $E(y)$ kallas responsyta. Om responsvariabel modelleras av en linjär funktion är den approximativa funktionen första ordningens modell:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

Ifall det existerar kurvatur i sambandet mellan responsvariabel och faktorer kan responsvariabeln approximeras av en andra ordningens modell:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

Minsta kvadratmetoden används för att skatta β-koefficienterna, se avsnitt (3.3.1).

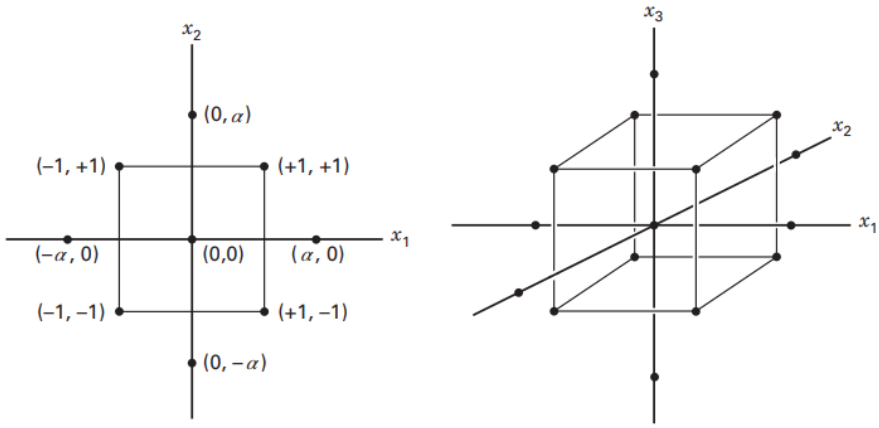
Ofta används metoden för brantaste stigningen för att röra sig från nuvarande styrområde till ett mer optimalt område. Eftersom detta arbete enbart kommer att utföras inom rådande styrområde, och utforska nästan hela området, kommer denna metod inte att användas.

Vidare används ofta inom RSM karakterisering av responsytan för att identifiera optimala punkter genom att sätta gradienten till noll och analysera Hessianmatrisen. Denna metod är dock främst användbar när en enda respons ska optimeras och när processen är stabil över tid. I denna studie analyseras flera responser samtidigt, och eftersom processen är dynamisk kan en optimal punkt för en respons inte nödvändigtvis betraktas som optimal för helheten.

En vanlig metod för att analysera och optimera flera responsvariabler samtidigt är med överlagda konturdiagram (Montgomery, 2017, s.506). Konturerna i diagrammet sätts till en hög och låg gräns för varje responsvariabeln. Det område där inga konturer överlappar representerar kombinationer av faktorer som leder till en godtagbar process.

3.7.1 Centrerad kompositdesign

Centrerad kompositdesign (CCD) är den vanligaste designen för att estimera andra ordningens modeller. Denna gör det möjligt att inkludera eventuella icke-linjära samband mellan faktorer och responser. En CCD innefattar $n_f = 2^k$ faktoriella försök, $n_a = 2 \cdot k$ axiala försök och n_c centrala försök (Montgomery, 2017, s. 512). De axiala punkterna bidrar till att fånga upp eventuella icke-linjära samband, medan de centrala punkterna används för att uppskatta experimentets felvarians. En illustration av CCD för två och tre faktorer visas i Figur (3).



Figur 3: Exempel på en Central kompositdesign för två och tre faktorer (Montgomery, 2017, s.512).

För att säkerställa att modellen ger pålitliga prediktioner inom det utforskade området är det avgörande att variansen för den predikterade responsvariabeln, $V[\hat{y}(\boldsymbol{x})]$, är stabil och konstant vid punkten $\boldsymbol{x}$. Variansen ges av

$$V[\hat{y}(\boldsymbol{x})] = \sigma^2 \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{x}$$

För att uppnå detta måste designmatrisen vara **roterbar**, vilket innebär att variansen $V[\hat{y}(\boldsymbol{x})]$ förblir konstant för alla punkter $\boldsymbol{x}$ som ligger på samma avstånd från mittpunkten. Detta uppnås genom att sätta avståndet mellan de axiala punkterna och mittpunkten till $\alpha = (n_f)^{1/4}$. Dessutom rekommenderas 3–5 replikat av mittpunkten för att säkerställa en tillförlitlig uppskattning av experimentets fel och minska variationen i den predikterade responsvariabeln.

3.8 Korrelation

Den linjära korrelationen mellan två kontinuerliga variabler mäts med Pearsons korrelations koefficient.

$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x}\sqrt{s_y}}$$

där

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

s_{xy} är stickprovsvariansen mellan variablerna $\boldsymbol{X}$ och $\boldsymbol{Y}$, $\bar{x}$ och $\bar{y}$ är stickprovsmedelvärdet, och s_x och s_y är stickprovsvariansen. Värdet på r är mellan -1 och 1, där ett högt positivt värde indikera ett starkt positivt samband, och ett högt negativt värde indikerar ett starkt negativt samband. Om $r = 0$ finns det inget samband mellan variablerna.

4 Metod

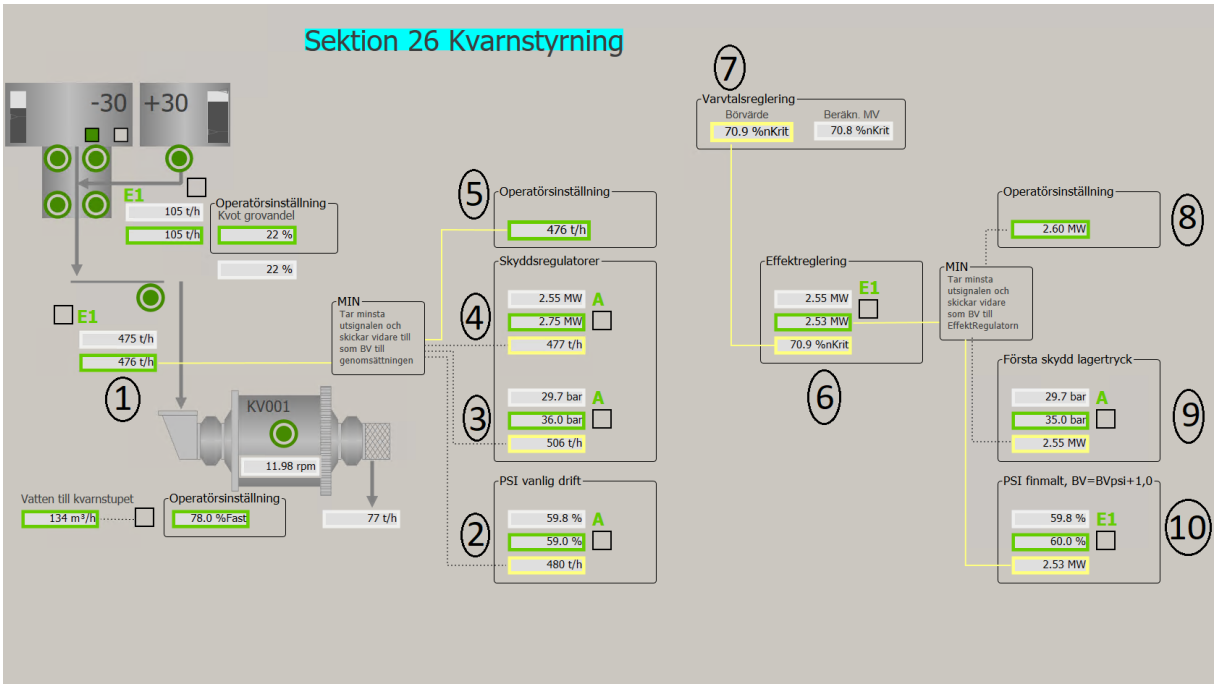
I detta avsnitt presenteras metoden som kommer att användas under detta arbete för att besvara frågeställningarna och uppnå målen.

4.1 Beskrivning av nuvarande kvarnstyrning

Denna sektion kommer att ge en beskrivning av nuvarande kvarnstyrning för att läsaren bättre ska förstå syftet med projektet.

Hösten 2018 installerades en ny frekvensomriktare på sektion 26, vilket medförde möjligheten att styra *Varvtalet* på autogenkvarnen. Reglerstrukturen bygger på en *PID*-styrning, och använder två styrsignaler. Den ena är för *Varvtalet* på autogenkvarnen, och den andra är *Ingående tonnage* till autogenkvarnen. Två andra signaler som påverkar kvarnprocessen, men som inte innefattas av styrningen, är *Malstenskvot* och *Spädvatten*.

Reglerstrategin är att försöka hålla upp *Effekten* med hjälp av *Varvtalet*, och *nedmalningsgraden* med *Ingående tonnage*. Vidare finns skyddsregulatorer för att säkerställa att *Effekt* eller *Lagertryck* inte blir för höga.



Figur 4: Visualisering av kvarnstyrning.

I figur 4 visas en visualisering av kvarnstyrningen, där olika delar är numrerade och beskrivs nedan.

Regulator för malningskvalité
Styrning av *Malningskvalité* (*Yta*) sker genom att justera börvärdet för regulatorn för *PSI*, nummer *2*. Om en för grov (eller för fin) *Yta* observeras, justeras börvärdet för *PSI* uppåt (nedåt). Regulatorn kommer då att justera sin utsignal för *Ingående tonnage* (se den gulmarkerade rutan kopplad till nummer *2*) för att uppnå *PSI*-börvärdet.

Skyddsregulatorer för höga *Effekter* och *Lagertryck*
Om *Effekt* eller *Lagertryck* är för hög, kommer i första hand *Varvtalet* att öka för att mala ur kvarnen och sänka *Effekten* och *Lagertrycket* (beskrivs vidare i nästa stycke). Om det inte räcker med att öka *Varvtalet* kommer skyddsregulatorerna, nummer *3* och *4*, att minska utsignalen för *Ingående tonnage*.

Det lägsta värdet på utsignalen för *Ingående tonnage* från de tre regulatorerna, nummer *2*, *3* och *4*, kommer att agera börvärde för *Ingående tonnage*, nummer *1*. Operatören kan dessutom ange ett maxvärde för *Ingående tonnage*, vilket då också inkluderas i jämförelsen. Det lägsta av dessa fyra värden, de tre regulatorerna samt operatörens maxinställning, representeras av den gula linjen och används som slutligt börvärde.

Effektregulator
Denna regulator kontrollerar *Effekten*, nummer *6*, med hjälp av *Varvtalet*, nummer *7*. Börvärdet för Effektregulatorn ska vara lägre än Effektskyddsregulatorn, nummer *4*, för att säkerställa att kvarnen kommer att höja *Varvtalet* istället för att sänka *Ingående tonnage*. Skulle *Effekten* stiga kraftigt kommer dock båda att ske samtidigt. Operatören kan sätta ett max-börvärde för Effektregulatorn.

Effektregulatorn får sitt börvärde från det minsta utsignalen från Lagertryck-regulatorn, nummer *9*, eller regulatorn för fin malningskvalité, nummer *10*. Lagertrycks-regulatorn säkerställer att *Lagertrycket* inte blir för högt. Börjar *Lagertrycket* att bli högt kommer regulatorn att styra ned börvärdet för *Effekt*, vilket i sin tur kommer att öka *Varvtalet*.

Regulatorn för fin malningskvalité, nummer *10*, används för att inte mala för fint, och syftet är att ge energibesparing då *Ingående tonnage* av någon anledning inte kan ökas. Denna regulator kommer sällan till användning, men exempel då den används är om slurrytanken på kulsinterverket börjar bli full, eller om fosforreningen inte kan ta emot mer. Eftersom *Ingående tonnage* inte kan ökas, kan *PSI*-värdet vara för högt och kvarnen maler för fint. För att motverka detta kommer denna regulator att sänka börvärdet för *Effekt* för att mala grövre.

4.2 Responsvariabler

Som tidigare nämnt styrs processen mot variablerna *Effekt*, *Lagertryck* och kvalitetsvariablerna *PSI* och *Yta*. Dessa variabler är centrala för att upprätthålla en stabil kvarnprocess samt för att säkerställa att kvalitetskraven på slutprodukten uppfylls. I denna rapport kommer även *Pebblesproduktionen* och *Specifik energiförbrukning* att behandlas. Dessa variabler mäts i följande enheter:

- *Effekt*: megawatt (MW)
- *Lagertryck*: tryck (bar)
- *PSI*: $\% < 45\mu m$

- *Yta*: $Area/Volym = cm2/cm3$
- *Specifik energiförbrukning*: kWh/Ton
- *Pebblesproduktion*: Ton/h.

Responsvariabeln *Effekt* avser den energi som förbrukas av autogenkvarnen, medan *Lagertryck* anger kvarnens last eller fyllnadsgrad. *PSI* är ett mått på finleken och definieras som andelen material med partikelstorlek under $45\mu m$ enligt storleksfördelningskurvan. *Yta* beskriver förhållandet mellan yta och volym och är ett värde som representerar de finaste partiklarna. *Pebblesproduktionen* avser mängden material (6–30 mm) som avskiljs från primärkvarnen, medan specifik energiförbrukning (*kWh/Ton*) definieras som den energiåtgång som används för att mala ner materialet i autogenkvarnen efter att pebbles avlägsnats, och beräknas enligt formeln:

$$Energiförbrukning = \frac{1000 \cdot Effekt}{Ingående\ tonnage - Pebblesproduktion}$$

Både *Effekt*, *Lagertryck* och *Pebblesproduktion* mäts frekvent i autogenkvarnen. *PSI* mäts frekvent efter pebbleskvarnen, medan *Yta* mäts efter flotationen som ett gemensamt värde för båda malningssektionerna.

Ytprover tas frekvent under en fyra-timmarsperiod, vilket gör det svårt att koppla ett specifikt värde till ett experiment, eftersom flera experiment kan genomföras under samma tidsperiod. Dessutom är *Yta* ett samlat mått för malningen i både sektion 26 och 27, vilket försvårar att avgöra vilken sektion som orsakat förändringar. Av dessa anledningar exkluderades *Yta* som responsvariabel.

För att komplettera de kontinuerliga mätningarna och erhålla ett mer specifikt mått på primärkvarnens malningsprestanda, utfördes manuella provtagningar. Dessa prover togs efter det sista magnetsepareringssteget i båda primärseparatorerna i malningskrets 26. Proverna analyserar storleksfördelningen och kompletterar *PSI* genom att specifikt mäta storleksfördelningen av det som lämnar primärkvarnskretsen, istället för sekundärkvarnskretsen. Denna responsvariabel kommer att benämnas som *P45*.

4.3 Faktorer och faktornivåer

För att styra autogenkvarnen, och därmed nedmalningsgraden, justeras parametrarna *Ingående tonnage*, *Varvtal*, *Malstenskvot* och *Spädvatten*. För att hålla nere komplexiteten och fokusera på de mest avgörande faktorerna för nedmalningsgraden valdes *Spädvatten* bort. Detta beslut grundades på att studien främst syftar till att analysera effekterna av de tre kvarvarande faktorerna, som anses vara mest kritiska för nedmalningsgraden.

De tre faktorerna har följande enheter:

- *Ingående tonnage*: ton/h
- *Varvtal*: %n-krit
- *Malstenskvot*: % av *Ingående tonnage*

Ingående tonnage mäter den totala massan som matas in i autogenkvarnen. *Varvtal* anges som procent av det kritiska varvtalet (vilket mäts i RPM), där 100% n-krit innebär att godset centrifugerar i kvarnen och

inget malningsarbete utförs. *Malstenskvot* beskriver andelen malsten (+30 mm) i förhållande till den totala massan som matas in i kvarnen (ton/h).

Idag finns det en automatisk styrning av både *Varvtal* och *Ingående tonnage*, och därför valdes de yttre nivåerna för dessa faktorer för att representera det befintliga intervallet inom styrningen. Eftersom *Malstenskvot* inte har någon automatisk styrning valdes ett bredare intervall, i syfte att fånga den potentiella påverkan denna faktor kan ha på processens stabilitet och responsvariablerna. Nivåerna valdes även med hänsyn till att kombinationer av faktorer inte skulle resultera i ogynnsamma förhållanden för responsvariablerna *Effekt*, *Lagertryck* och *PSI*.

Fem nivåer av varje faktor valdes ut för försöksplanen, där nivåerna är kodade enligt en central komposit design (CCD). Av sekretesskäl redovisas inte de exakta nivåerna.

4.4 Historisk processdata

För att sätta resultaten från experimentet i kontext presenteras i tabell 2 historiska medelvärden och standardavvikelser för responsvariabler, faktorer och andra viktiga variabler. Data är uttaget från 2022-01-01 till 2025-03-25. Dessa värden är sorterade för att representera en stabil process, och återspeglar normal variation. De används som jämförelse i den efterföljande analysen.

På grund av sekretesskäl är all data som presenteras i denna rapport standardiserad. Responsvariablerna har standardiserats utifrån medelvärden och standardavvikelser erhållna under genomförandet av försöksplanen. Faktorerna har justerats i enlighet med de använda faktornivåerna.

Tabell 2: Historisk processdata

	Medelvärde	Median	Min-värde	Max-värde	Standardavvikelse
Ingående tonnage	-0.134	0.056	-4.493	3.757	1.572
Varvtal	0.304	0.587	-3.240	2.777	1.201
Malstenskvot	0.443	0.430	-2.103	3.168	0.537
Effekt	1.515	1.583	-0.080	2.587	0.413
Lagertryck	2.234	2.261	-0.475	4.492	0.623
Pebblesproduktion	0.249	0.297	-4.153	3.988	1.566
Pebbles Sekundärkvarn	-4.164	-4.039	-12.284	11.233	2.796
PSI	2.293	2.628	-5.373	11.137	3.088
kWh/Ton	1.976	1.846	-0.858	5.680	0.926

4.5 Responsytemetod och val av designmatris

För att undersöka sambandet mellan faktorer och responsvariabler användes Responsytemetod (RSM), som är väl lämpad för att modellera och optimera processer där flera faktorer samtidigt påverkar en eller flera responsvariabler. Metoden har tidigare tillämpats inom liknande processindustrier, exempelvis vid optimering av nedmalningsgraden i en kulkvarn genom justering av kulstorlek och mängd (Ebadnejad m.fl., 2013).

I denna studie tillämpades en central kompositdesign (CCD) med tre faktorer, vilket resulterade i totalt 19 försök: 8 faktoriella, 6 axiala och 5 mittpunktsreplikat. Designen möjliggör estimering av både linjära och icke-linjära samband samt interaktioner. För att uppnå roterbarhet valdes det axiala avståndet till $\alpha = 8^{1/4} = 1.682$.

Den fullständiga designmatrisen återfinns i bilaga Bilaga A, och den randomiserade körordningen i bilaga Bilaga B.

4.6 Genomförande av försöksplan

Innan den faktiska försöksplanen genomfördes utfördes testkörningar under vecka 7. Syftet med dessa var att utvärdera hur lång tid processen tar att stabiliseras efter en faktorförändring samt att säkerställa att alla faktorkombinationer kunde genomföras.

Under testkörningarna uppstod dock störningar, främst på grund av malstensbortfall där material fastnade i stupet ner till transportbandet. Detta återkommande problem gjorde det svårt att få en korrekt indikation på både stabiliseringstiden och genomförbarheten för de olika faktorkombinationerna.

Försöksplanen genomfördes under vecka 8 och 9. Ursprungligen planerades intervallet för faktorn *Varvtal* till -2.67 till 0 i kodade nivåer. Vid det första försöket, där ett lågt *Varvtal* skulle testas, observerades dock en hög *Effekt*, vilket gjorde det omöjligt att genomföra testet utan att riskera för höga *Effekter*. Därför justerades intervallet för *Varvtal* till -1.682 till 1.682 i kodade nivåer. Övriga faktorer behöll sina ursprungliga intervall.

Det nya intervallet visade sig dock vara för brett uppåt, då låga *Effekter* observerades vid höga *Varvtal*. Samtidigt kunde låga *Varvtal* inte undersökas på grund av förändringen av nivåerna.

Varje test genomfördes genom att stegvis ställa in faktornivåerna för att minimera störningar i autogenkvarnen och för att säkerställa genomförbarheten utifrån parametrarna *Effekt* och *Lagertryck*. När nivåerna var färdiginställda påbörjades testet och responsvariablernas kurvor observerades. Om *Effekt* eller *Lagertryck* närmade sig kritiska nivåer parerades detta ibland genom justeringar av *Varvtal* och/eller *Ingående tonnage*.

När responsvariablernas kurvor stabiliserades, betraktades testet som ha nått *Steady state*, och provtagning från primärseparationskretsen beställdes. Stabiliseringstiden var dock svår att förutse eftersom inslag av annan malsten ibland förändrade dynamiken i primärkvarnen. Detta medförde att tidpunkten för provtagning och för att processen nådde *Steady state* kunde variera mellan vissa av testerna.

Efter att alla tester genomförts hämtades data för hela perioden från LKAB:s datalagringssytem, IP21. Data var interpolerad till 1-minutsintervall för att säkerställa så hög noggrannhet som möjligt. Eftersom responsvariablerna alltid uppvisar viss variation beräknades ett medelvärde för varje test. Detta medelvärde togs i regel under den period då provtagningen genomfördes. Om provtagningen skedde under en instabil processperiod beräknades istället medelvärdet utifrån den tidsperiod då processen bedömdes vara stabil. Se Bilaga C för datum och tider för datapunkterna.

När proverna hade analyserats erhölls en siktanalys per försök och krets, vilket gav totalt 38 analyser. Varje

analys omfattade siktfraktionerna 45–4000 μm tillsammans med den kumulativa andelen material som passerat respektive sikt. Ett medelvärde per försök beräknades från de båda kretsarna.

Utifrån dessa data skapades siktfördelningskurvor, en per försök, som visar materialets storleksfördelning. Från siktkurvorna extraherades partikelstorlekar vid specifika procentandelar av den kumulativa massfördelningen. Vanligtvis används *P80* och *P50*, där P80 representerar den partikelstorlek vid vilken 80% av materialet är finare. Även *P70* och *P45* beräknades, men *P45* valdes för vidare analys eftersom detta värde hade högst förklaringsgrad (R^2).

4.7 Statistisk programvara

Minitab

Minitab, ett statistiskt programverktyg (Minitab, 2025), användes för analys i detta examensarbete. En responsytdesign, närmare bestämt en central kompositdesign (se avsnitt 3.7.1), valdes med tre faktorer och fem replikat i mittpunkten. Denna låg till grund för försöksplanen. Data för de olika responsvariablerna samlades in och importerades till Minitab för vidare analys.

Utifrån de insamlade data modellerades responsvariablerna med hjälp av responsytmetodiken (se avsnitt 3.7). Minitab genererade bland annat kodade koefficienter, modellsammanfattningar, ANOVA-tabeller, regressionsmodeller i okodade enheter, samt diagnostiska mått för avvikande observationer och residualdiagram.

För varje responsvariabel skapades inledningsvis en modell med alla termer inkluderade: huvudeffekter, tvåvägsinteraktioner samt kvadratiska termer. ANOVA-tabellerna användes därefter för att identifiera signifikanta termer (se avsnitt 3.5.2), där termer med ett p-värde under 0.05 anses vara signifikanta. I vissa fall behölls dock termer som inte var statistiskt signifikanta, om det efter övervägande bedömdes förbättra modellens beskrivning av processen. De specifika motiveringarna för sådana val diskuteras i diskussionen av de enskilda modellerna.

Residualdiagram användes för att granska modellernas lämplighet och verifiera att underliggande antaganden var uppfyllda, vilket var ett centralt steg för att säkerställa resultatens tillförlitlighet.

För att ge en tydligare bild av hur respektive faktor påverkar responsvariablerna, skapades huvudeffektplottar. Om modellen inkluderade signifikanta interaktioner visualiserades dessa med interaktionsplottar. För att ytterligare illustrera sambanden mellan faktorerna och respektive respons skapades även konturplottar, där två faktorer varierades medan den tredje hölls konstant.

Slutligen användes överlagda konturplottar för att identifiera styrintervall som uppfyllde samtliga krav för de aktuella responsvariablerna. Dessa visualiseringar var centrala för att kunna analysera hur produktionen kan maximeras, hur processen kan köras mer energisnålt, samt för att utvärdera strategier gällande *Malstenskvoten*.

R

R (R Core Team, 2024), version 4.3.3, användes för att skapa siktfördelningskurvor baserat på provtagningsdata samt för att testa normalfördelningsantagandet för residualer i de fall där normalfördelningsdiagrammet

indikerade avvikelser från normalitet.

Data från varje provtagning, inklusive siktstorlek och respektive kumulativ andel passerande material, importerades till R. Därefter skapades siktfördelningskurvor med hjälp av funktionen *splinefun* från R-paketet *stats*, som utför kubisk splineinterpolering av datapunkterna.

För att beräkna värden för responsvariabeln *P45* användes funktionen *uniroot*, vilken söker efter nollställen för en given funktion inom ett specificerat intervall. Den analyserade funktionen definierades som differensen mellan den interpolerade siktfördelningskurvan (andel material som passerat som funktion av siktstorlek) och värdet 45. Funktionen löstes alltså för den siktstorlek där 45% av materialet hade passerat, vilket definierar *P45*.

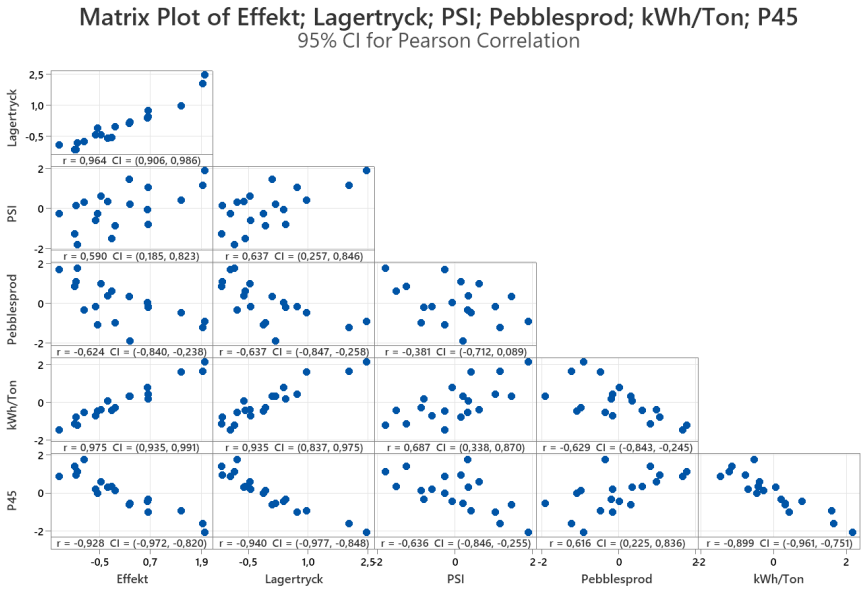
För att testa normalfördelningsantagandet (se sektion 3.6.4) användes funktionen *shapiro.test* från R-paketet *stats*. Residualerna för modellen exporterades från Minitab och importerades till R, varefter de analyserades i funktionen. Om $p > 0.05$ indikerar detta att residualernas fördelning inte skiljer sig signifikant från en normalfördelning, och normalitet kan antas.

5 Resultat

I denna sektion presenteras resultaten av försöksplanen. De data som har använts i analysen återfinns i Bilaga D.

5.1 Korrelationsanalys

Figur 5 visar en matrisplott som visualiserar korrelationen mellan alla responsvariabler, tillsammans med tillhörande Pearson-korrelation.



Figur 5: Matrisplott mellan responsvariablernas korrelation, med Pearson-korrelation för att indikera styrkan och riktningen på sambanden.

5.2 Effekt

ANOVA Reducerad Modell

Tabell 3 visar ANOVA-resultaten för den reducerade modellen. Alla huvudeffekter är signifikanta, samt interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*. Den kvadratiska termen för *Varvtal* är inkluderad i modellen men är inte signifikant. ANOVA-tabellen med samtliga termer inkluderade presenteras i Bilaga E, tabell E1.

Tabell 3: Analys av varians för responsvariabeln *Effekt* för den reducerade modellen.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	5	15.9439	3.1888	20.16	0.000
Linear	3	14.6555	4.8852	30.89	0.000
Ingående_ton	1	2.2604	2.2604	14.29	0.002
Varvtal	1	7.2468	7.2468	45.82	0.000
Malstenskvot	1	5.1483	5.1483	32.55	0.000
Square	1	0.3398	0.3398	2.15	0.166
Varvtal^2	1	0.3398	0.3398	2.15	0.166
2-Way Interaction	1	0.9486	0.9486	6.00	0.029
Ingående_ton*Varvtal	1	0.9486	0.9486	6.00	0.029
Error	13	2.0561	0.1582		
Lack-of-Fit	9	1.0453	0.1161	0.46	0.847
Pure Error	4	1.0108	0.2527		
Total	18	18.0000			

Regressionsmodell

Den reducerade regressionsmodellen för *Effekt* visas nedan i ekvation (1).

$$\begin{aligned}\text{Effekt} = &-0.111 + 0.407 \times \text{Ingående tonnage} \\ &-0.728 \times \text{Varvtal} \\ &+0.614 \times \text{Malstenskvot} \\ &+0.155 \times \text{Varvtal}^2 \\ &-0.344 \times \text{Ingående tonnage} \times \text{Varvtal}\end{aligned} \tag{1}$$

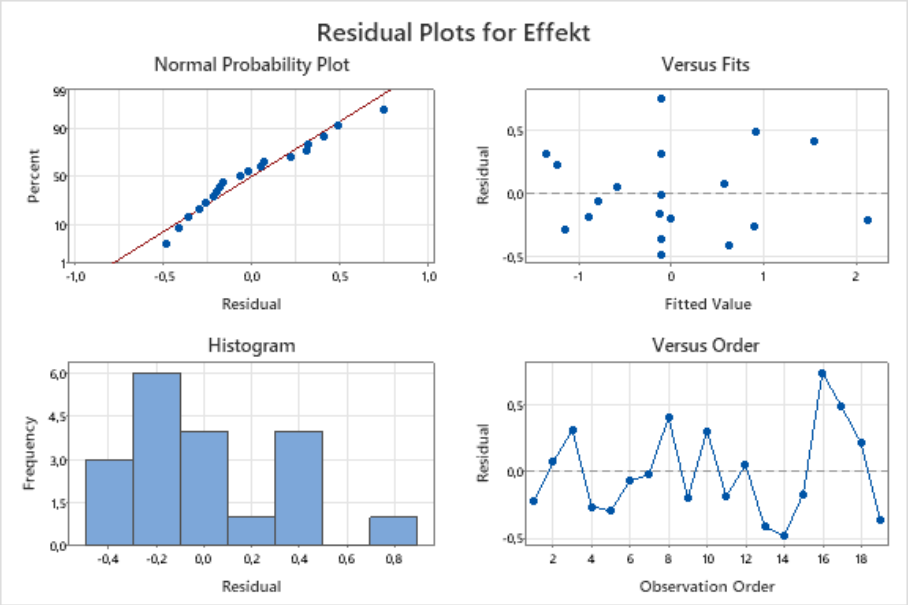
Modellsammanfattning

Tabell 4: Modellsammanfattning för *Effekt*.

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0.397695	88.58%	84.18%	75.42%

Tabell 4 visar ett R^2_{adj} på 84.18% för den reducerade modellen för *Effekt*, vilket indikerar en hög förklaringsgrad.

Modellvalidering

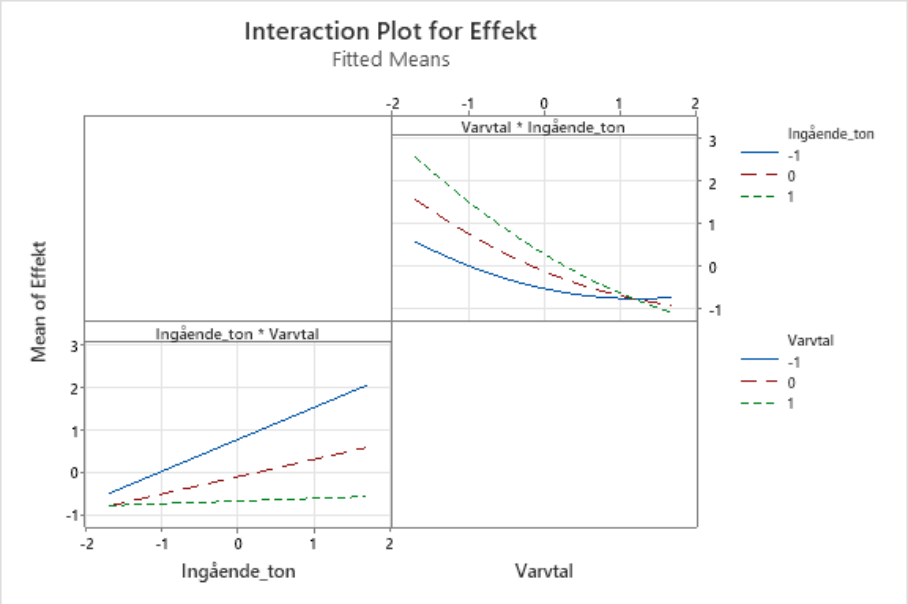


Figur 6: Residualdiagram för *Effekt* för den reducerade modellen.

Figur 6 visar residualdiagrammet för *Effekt* för den reducerade modellen. Normalfördelningsdiagrammet visar att residualerna följer en ungefär rak linje, vilket tyder på att de är normalfördelade. Residualerna mot de anpassade värdena är spridda slumpmässigt kring den sträckade linjen, vilket indikerar att residualerna inte har en ökande varians. Histogrammet av residualerna antyder en lätt vänstervriden fördelning. Inga mönster observeras när residualerna plottas mot körordning.

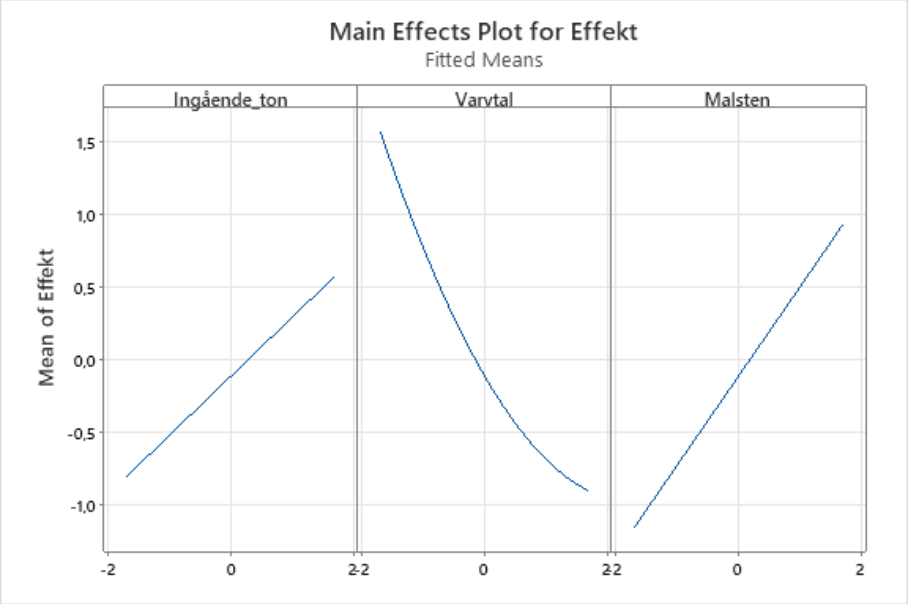
Interaktionseffekter

Figur 7 visar interaktionseffekten mellan faktorerna *Ingående tonnage* och *Varvtal* på responsvariabeln *Effekt*. I den övre högra delen av figuren illustreras hur *Effekt* förändras när *Ingående tonnage* hålls konstant vid tre nivåer, medan *Varvtal* varierar. I den nedre vänstra delen av figuren presenteras förändringen i *Effekt* när *Varvtal* hålls konstant vid tre nivåer, och *Ingående tonnage* justeras.



Figur 7: Visualisering av interaktionseffekterna på *Effekt*.

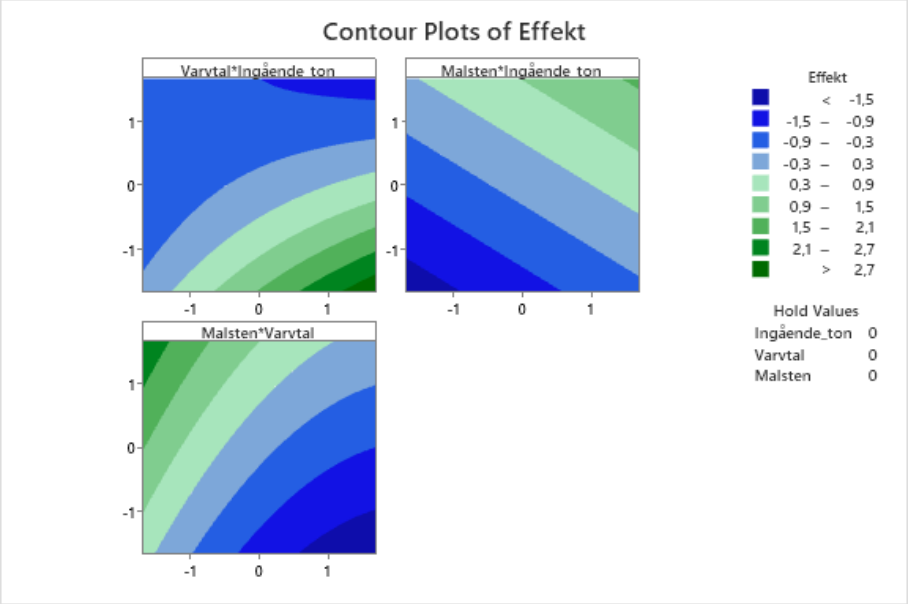
Huvudeffekter



Figur 8: Visualisering av huvudeffekterna på responsvariabeln *Effekt*.

I figur 8 presenteras huvudeffekterna för responsvariabeln *Effekt*. Då en signifikant interaktion mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* observerats, bör huvudeffekterna tolkas i relation till denna för att undvika missvisande slutsatser. *Malstenskvot* däremot, interagerar inte med någon annan faktor, vilket gör att dess effekt kan tolkas separat. Det framgår att *Malstenskvot* har en positiv påverkan på *Effekt*.

Konturplottar



Figur 9: Konturplot för responsvariabeln *Effekt* mellan faktorerna *Ingående tonnage* och *Varvtal*.

Konturplottarna i figur 9 illustrerar hur *Effekt* påverkas av de tre faktorerna. I den övre vänstra delen av figuren visas den signifikanta interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*. I den övre högra delen av figuren visas konturplotten mellan *Malstenskvot* och *Ingående tonnage*, och i den nedre delen av figuren visas konturplotten mellan *Malstenskvot* och *Varvtal*.

5.3 Lagertryck

Detaljerade resultat återfinns i Bilaga F, där fullständiga ANOVA-tabeller, validering av modellantaganden (residual- och diagnostikanalyser), samt grafer över huvudeffekter, interaktioner och konturplottar presenteras.

Regressionsmodell

Ekvation (2) visar den reducerade regressionsmodellen för *Lagertryck*.

$$
\begin{aligned}
\text{Lagertryck} = &-0.163 + 0.3725 \times \text{Ingående tonnage} \\
&-0.8843 \times \text{Varvtal} \\
&+0.4120 \times \text{Malstenskvot} \\
&+0.2268 \times \text{Varvtal} \times \text{Varvtal} \\
&-0.295 \times \text{Ingående tonnage} \times \text{Varvtal}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Modellsammanfattning

Tabell 5: Modellsammanfattning för responsvariabel *Lagertryck*.

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0.359604	90.66%	87.07%	75.44%

Tabell 5 redovisar modellsammanfattningen för den reducerade modellen av responsvariabeln *Lagertryck*. Justerat R^2 är 87.07%, vilket innebär på att modellen förklarar en stor andel av variationen i data.

5.4 PSI

Detaljerade resultat återfinns i Bilaga G, där fullständiga ANOVA-tabeller, validering av modellantaganden (residual- och diagnostikanalyser), samt grafer över huvudeffekter, interaktioner och konturplottar presenteras.

Regressionsmodell

Ekvation (3) visar den reducerade regressionsmodellen för *PSI* i kodade enheter.

$$
\begin{aligned}
\text{PSI} = &\ 0.000 - 0.252 \times \text{Ingående_ton} \\
&-0.750 \times \text{Varvtal} \\
&-0.760 \times \text{Ingående_ton} \times \text{Varvtal}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Modellsammanfattning

Tabell 6: Modellsammanfattning för responsvariabel *PSI*

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0.568030	73.11%	67.73%	65.44%

I tabell 6 visas modellsammanfattningen för responsvariabeln *PSI*. Modellen har ett $R^2_{adj} = 67.73\%$, vilket innebär att modellen förklarar en betydande del av variationen.

5.5 P45

I Bilaga H presenteras detaljerade analyser inklusive kompletta ANOVA-tabeller, validering av modellens antaganden genom residual- och diagnostikplottar, samt grafiska illustrationer av huvudeffekter, interaktioner och konturplottar.

Regressionsmodell

Ekvation (4) visar den reducerade regressionsmodellen för *P45* i kodade enheter.

$$\begin{aligned} P45 = & -0.175 - 0.386 \times \text{Ingående_ton} \\ & + 0.853 \times \text{Varvtal} \\ & - 0.408 \times \text{Malstenskvot} \\ & + 0.243 \times \text{Ingående_ton}^2 \\ & + 0.280 \times \text{Ingående_ton} \times \text{Varvtal} \end{aligned} \tag{4}$$

Modellsammanfattning

Tabell 7: Modellsammanfattning för responsvariabel *P45*

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0.419270	87.30%	82.42%	69.90%

I tabell 7 visas modellsammanfattningen för responsvariabeln *P45*. Modellen har ett $R^2_{adj} = 82.42\%$, vilket indikerar en god förklaringsgrad av data.

5.6 Pebblesproduktion

För fullständiga ANOVA-resultat, modellvalidering och visualiseringar av samband hänvisas till Bilaga I.

Regressionsmodell

Ekvation (5) visar regressionsmodellen för *Pebblesproduktionen* i kodade enheter.

$$\text{Pebblesproduktion} = -0.000 + 0.207 \times \text{Ingående tonnage} + 0.815 \times \text{Varvtal} - 0.542 \times \text{Malstenskvot} \tag{5}$$

Modellsammanfattning

I tabell 8 visas modellsammanfattningen för den reducerade modellen av *Pebblesproduktion*, som har ett R^2_{adj} på 71.19% och därmed en god förklaringsgrad.

Tabell 8: Modellsammanfattning för responsvariabel *Pebblesproduktion*.

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0.536740	75.99%	71.19%	64.23%

5.7 Specifik energiförbrukning (kWh/Ton)

Fullständiga resultat, se Bilaga J, där ANOVA-tabeller, analyser av residualer och antaganden, samt grafer för huvudeffekter, interaktioner och konturplottar redovisas.

Regressionsmodell

Den slutgiltiga regressionsmodellen i kodade enheter visas i ekvation (6).

$$\begin{aligned} \text{kWh/Ton} = & 0 + 0.186 \times \text{Ingående tonnage} \\ & - 0.722 \times \text{Varvtal} \\ & + 0.645 \times \text{Malstenskvot} \\ & - 0.394 \times \text{Ingående tonnage} \times \text{Varvtal} \end{aligned} \tag{6}$$

Modellsammanfattning

Tabell 9: Modellsammanfattning för responsvariabel *kWh/Ton*

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0.498402	80.68%	75.16%	66.94%

I tabell 9 visas modellsammanfattningen för den reducerade modellen av responsvariabeln *kWh/Ton*, där det justerade R^2 uppgår till 75.16%, vilket indikerar att modellen förklarar en stor del av variationen.

5.8 Överlagda konturplottar

5.8.1 Maximera produktionen

Eftersom syftet är att enbart maximera produktionen (d.v.s. hålla *Ingående tonnage* hög), tas ingen hänsyn till *kWh/Ton*, som därför sätts till en hög nivå.

I följande figurer visas överlagda konturplottar mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* för olika *Malstenskvoter*. Dessutom justeras *PSI* och *P45* beroende på om finare eller grövre malning efterfrågas.

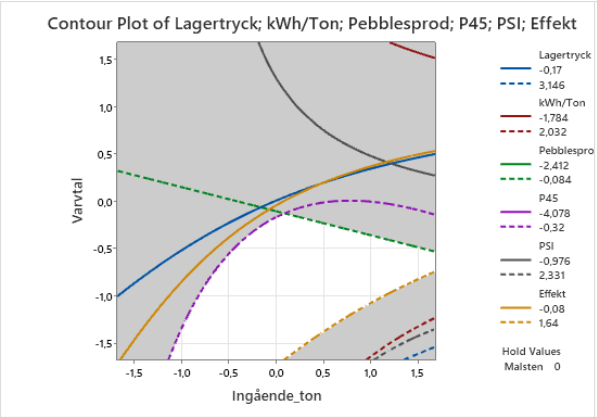
Tabell 10: Gränser för responsvariablerna vid maximering av produktionen.

Responsvariabel	Gräns
Effekt	[-0.080, 1.640]
Lagertryck	[-0.170, 3.146]
Pebblesproduktion	[-2.412, -0.084]
kWh/Ton	[-1.784, 2.032] (ej optimerad)

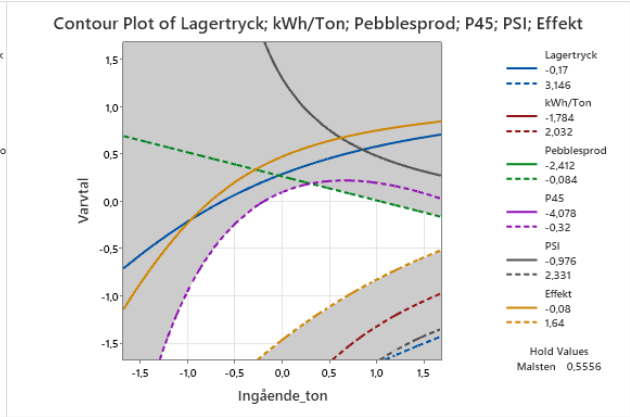
Grövre malning

Vid grövre malning sätts den lägre gränsen för *PSI* till -0.976 och den högre gränsen för *P45* till -0.320.

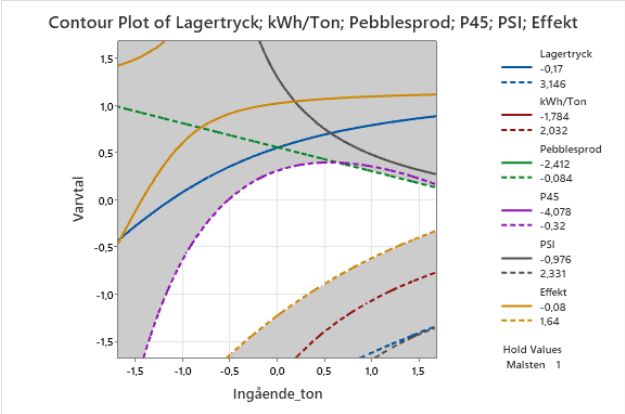
Figur 10 visar de överlagda konturplottarna för grövre malning, vid olika *Malstenskvoter*: 0, +0.56, +1. För figurerna med *Malstenskvoterna* -1 och -0.56, se Bilaga K.



(a) $Malstenskvot = 0$



(b) $Malstenskvot = +0.56$



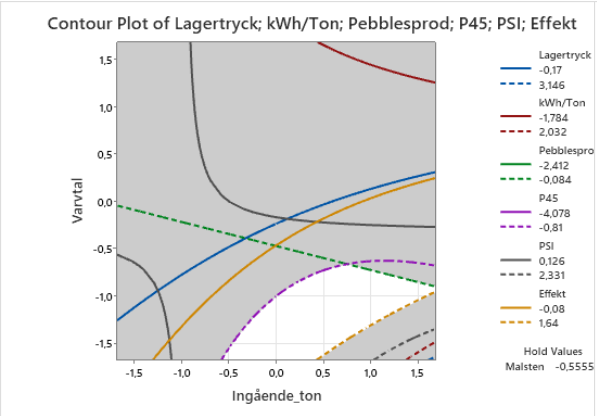
(c) $Malstenskvot = +1$

Figur 10: Överlagda konturplottar för grövre malning vid tre nivåer av *Malstenskvot*, med gränser enligt tabell 10.

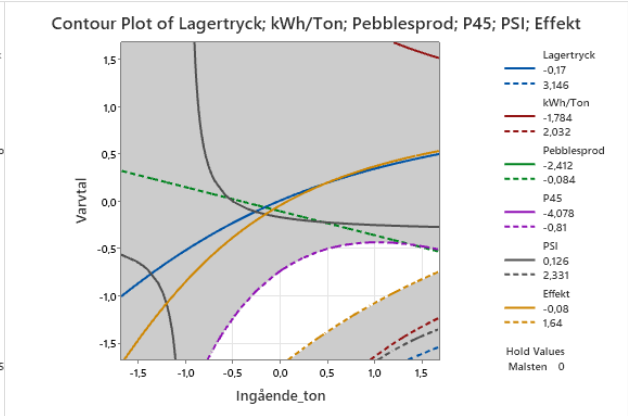
Finare malning

Vid finare malning sätts $PSI = 0.126$ och $P45 = -0.810$.

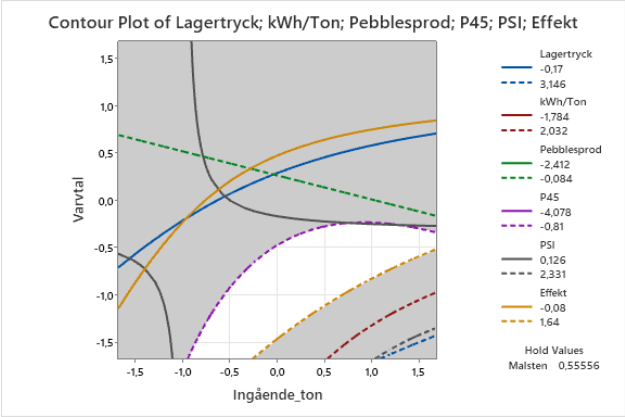
Figur 11 visar överlagda konturplottar för finare malning vid olika malstenskvoter (-0.56, 0, $+0.56$), med gränser enligt tabell 10 tillämpade. De överlagda konturdiagrammen för *Malstenskvoterna* -1 och +1 återfinns i Bilaga K



(a) $Malstenskvot = -0.56$



(b) $Malstenskvot = 0$



(c) $Malstenskvot = +0.56$

Figur 11: Överlagda konturplottar för finare malning vid tre nivåer av *Malstenskvot*, med gränser enligt tabell 10.

5.8.2 Minimera specifik energiförbrukning

Syftet i detta avsnitt är att undersöka hur den specifika energiförbrukningen (*kWh/Ton*) kan minimeras samtidigt som *Ingående tonnage* försöker maximeras. De analyserade scenarierna syftar till att identifiera de processförhållanden där den lägsta specifika energiförbrukningen uppnås, samt de som möjliggör en balans mellan hög produktion och låg specifik energiförbrukning.

De följande figurerna visar överlagda konturplottar som relaterar *Ingående tonnage* till *Varvtal* för olika *Malstenskvoter*. För varje scenario justeras även *PSI* och *P45*, beroende på den önskade malningsgraden.

Notera att den övre gränsen för *kWh/Ton* motsvarar en energiförbrukning som är 13.8% lägre än det historiska medelvärdet, beräknat utifrån den ursprungliga (icke-standardiserade) processdatan.

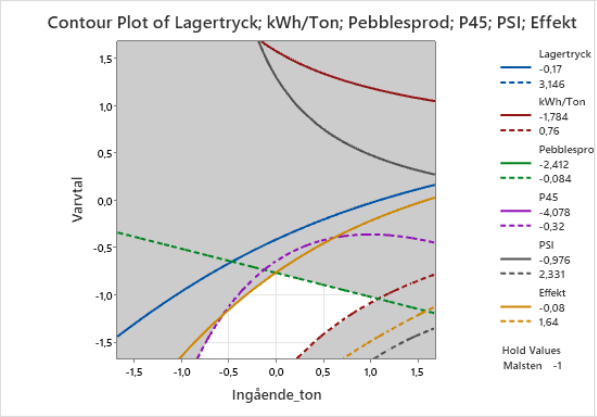
Tabell 11: Gränser för responsvariablerna vid minskad energiförbrukning per ton.

Responsvariabel	Gräns
Effekt	[-0.080, 1.640]
Lagertryck	[-0.170, 3.146]
Pebblesproduktion	[-2.412, -0.084]
kWh/Ton	[-1.784, 0.760]

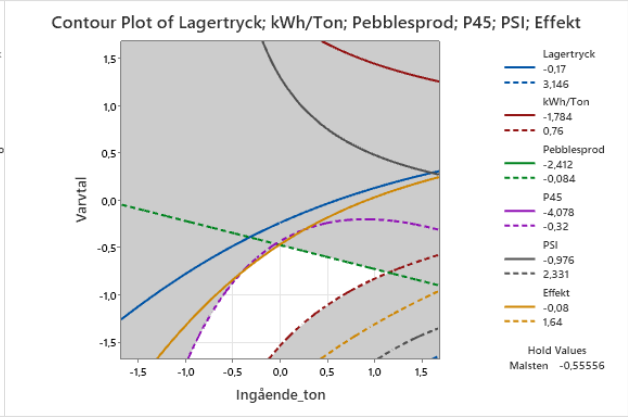
Grövre malning

För grövre malning är den nedre gränsen för *PSI* -0.976 och den övre gränsen för *P45* -0.320.

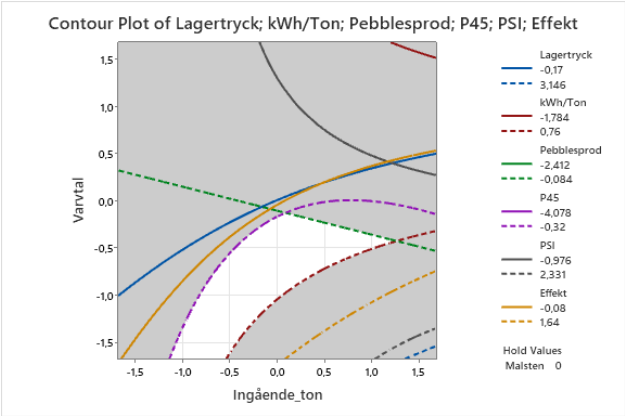
I figur 12 visar de överlagda konturplottarna för en mer energisnål produktion vid grövre malning, för *Malstenskvot* = -1, -0.56 och 0 respektive. De överlagda konturplottarna för *Malstenskvoterna* +0.56 och +1 visas i Bilaga L.



(a) $Malstenskvot = -1$



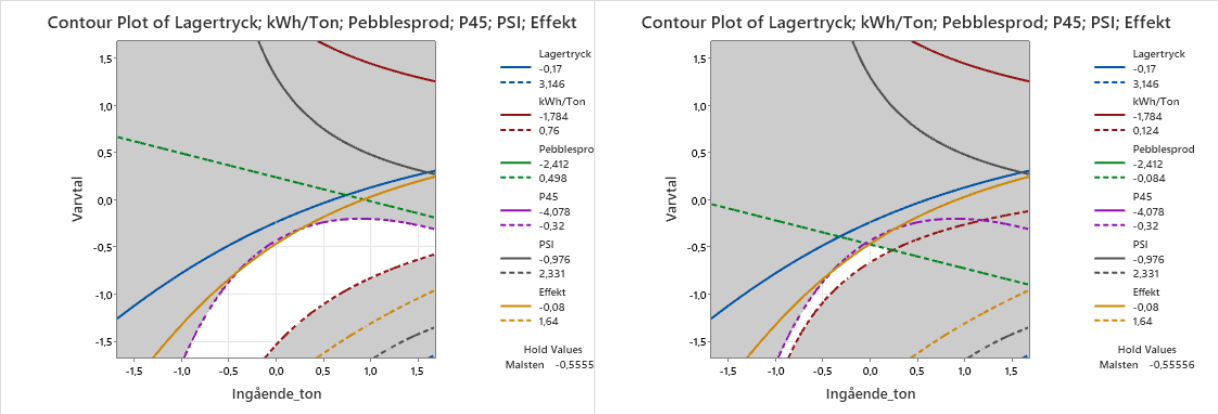
(b) $Malstenskvot = -0.56$



(c) $Malstenskvot = 0$

Figur 12: Överlagda konturplottar för att minimera den specifika energiförbrukningen, vid grövre malning och tre nivåer av *Malstenskvot*, med gränser enligt tabell 11.

Figur 13 visar överlagda konturplottar för *Malstenskvot* = +0.56 vid en justerad övre gräns för pebbleproduktionen (satt till 0.5) samt en plot med *Malstenskvot* = +0.56 där den övre gränsen för specifika energiförbrukning (*kWh/Ton*) har sänkts till 0.12.



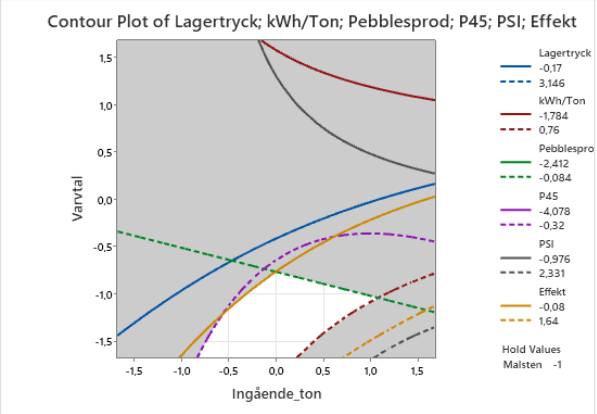
(a) $Malstenskvot = -0.56$ (b) $Malstenskvot = -0.56$

Figur 13: Överlagda konturplottar för att minimera den specifika energiförbrukningen vid grövre malning och $Malstenskvot = -0.56$. I (a) är den övre gränsen för pebbleproduktionen höjd till 0.5, och i (b) är den övre gränsen för *kWh/Ton* sänkt till 0.12. Övriga gränser enligt tabell 11.

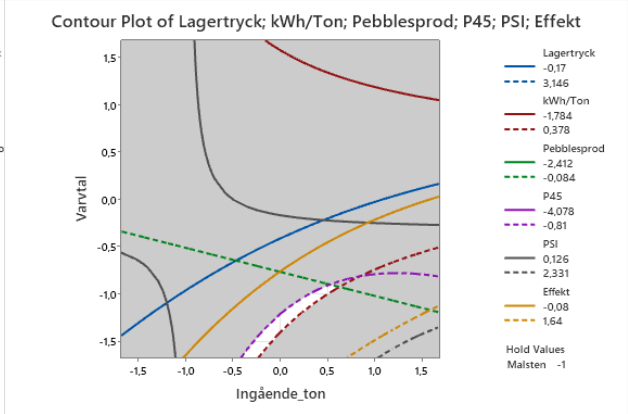
Finare malning

För finare malning är den nedre gränsen för *PSI* 0.126 och den övre gränsen för *P45* -0.084.

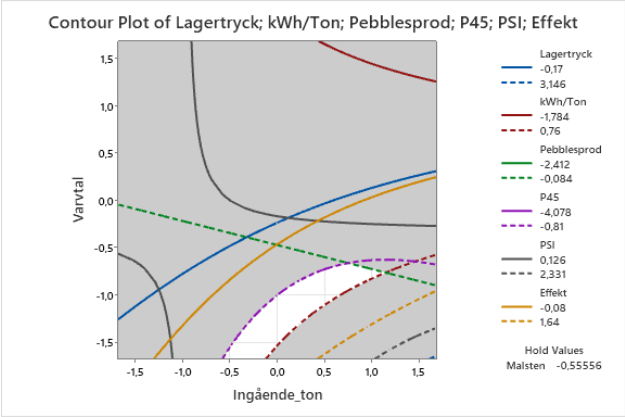
Figur 14 visar överlagda konturplottar för att minimera den specifika energiförbrukningen vid finare malning. I figur 14a visas resultatet för *Malstenskvot* = -1 med gränser enligt tabell 11. Figur 14b visar också *Malstenskvot* = -1, men den övre gränsen för energiförbrukningen sänkts till 0.378 *kWh/ton*. I figur 14c visas istället *Malstenskvot* = -0.56, återigen med gränser enligt tabell 11.



(a) $Malstenskvot = -1$



(b) $Malstenskvot = -1$



(c) $Malstenskvot = -0.56$

Figur 14: Överlagda konturplottar för att minimera den specifika energiförbrukningen vid finare malning. Två av plottarna visar *Malstenskvot* = -1, där den ena har gränser enligt tabell 11 och den andra har en justerad övre gräns för specifik energiförbrukning (0.378 *kWh/Ton*). Den tredje plotten visar *Malstenskvot* = -0.56 med gränser enligt tabell 11.

6 Diskussion

6.1 Korrelation mellan responsvariabler

I figur 5 visas korrelationsmatrisen för de olika responsvariablerna. Den starkaste korrelationen ($r = 0.975$) återfinns mellan *Effekt* och *kWh/Ton*, vilket är förväntat eftersom *kWh/Ton* beräknas delvis utifrån *Effekt*.

Det finns även en mycket stark positiv korrelation mellan *Lagertryck* och *Effekt* ($r = 0.964$), vilket är logiskt då ett högre *Lagertryck* innebär en högre last i kvarnen, och därmed krävs mer energi för att driva processen.

Vidare har *PSI* en relativt stark positiv korrelation både med *Effekt* ($r = 0.590$) och *Lagertryck* ($r = 0.637$). Detta tyder på att högre effekt och/eller last leder till en ökad nedmalningsgrad av materialet, vilket också förstärks av sambandet mellan *PSI* och *kWh/Ton* ($r = 0.687$).

De mest intressanta korrelationerna finns mellan *P45* och de tre responsvariablerna *Effekt*, *Lagertryck* och *kWh/Ton* ($r = -0.928, -0.940, -0.899$). Även här visar sambanden att en högre effekt och last leder till en ökad nedmalningsgrad, och en högre specifik energiförbrukning (*kWh/Ton*) leder till en mer finmald produkt. Däremot är sambanden för *P45* betydligt starkare jämfört med *PSI*. Eftersom nuvarande styrning reglerar kvarnens inmatning baserat på ett börvärde för *PSI*, vilket mäts efter pebbleskvarnen, registreras påverkan från förändringar i nedmalningsgraden från autogenkvarnen först i ett senare steg i processen.

För att förbättra styrningen skulle en frekvent mätning av *P45* kunna implementeras direkt efter primärkvarnskretsen, vilket skulle ge en bättre och snabbare återkoppling av nedmalningsgraden. Detta skulle göra det lättare att optimera processen och förstå hur ändringar i kvarnens inställningar påverkar malningsresultatet.

En annan intressant korrelation är den negativa mellan *Pebblesproduktion* och *Effekt* ($r = -0.624$), vilket innebär att *Pebblesproduktionen* tenderar att minska när *Effekten* ökar. Detta är rimligt, eftersom mer energi då används för att mala ned pebbles istället för att pebbles separeras från kvarnen. Vidare kan *Effekten* (och *kWh/Ton*) bibehållas eller ökas genom att minimera *Pebblesproduktionen*. På motsvarande sätt kan en ökad *Pebblesproduktion* bidra till att sänka *Effekten*.

Slutligen finns det en måttlig positiv korrelation ($r = 0.616$) mellan *P45* och *Pebblesproduktion*. Detta innebär att en grövre malning (högre *P45*) ofta sammanfaller med en ökad *Pebblesproduktion*, vilket kan tyda på att pebblesen fungerar som en viktig malningsmedia i autogenkvarnen. En alternativ hypotes är att en hög andel pebbles i det ingående materialet (vilket sannolikt leder till en ökad *Pebblesproduktion*) kan bidra till grövre malning. I sådana fall kan en hög *Pebblesproduktion* indikera ogynnsamma malningsförhållanden i autogenkvarnen. Eftersom storleksfördelningen i det ingående materialet inte mäts, går dessa hypoteser i nuläget inte att verifiera. Fler tester krävs för att kunna fastställa pebblesens påverkan på autogenmalningsprocessen.

6.2 Effekt

Den reducerade modellen inkluderar huvudeffekterna *Ingående tonnage*, *Varvtal* och *Malstenskvot*, interaktionstermen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*, samt en kvadratisk term för *Varvtal*. Alla termer, förutom den kvadratiska termen, är signifikanta vid $\alpha = 0.05$. Den kvadratiska termen behölls både på grund av dess starka korrelation med *Lagertryck* ($r = 0.964$), där den kvadratiska termen är signifikant, och för att den

eliminerade en uteliggare (observation 8). Denna observation motsvarar det låga axiala nivån för *Varvtal*. Vid låga *Varvtal* förväntas en högre *Effekt*, vilket modellen utan den kvadratiska termen underskattade.

Inkluderingen av den kvadratiska termen medförde att det justerade R^2 ökade med 1.3 procentenheter och prediktiva R^2 minskade med 2.02 procentenheter. Trots den minskade prediktiva förmågan anses denna förändring acceptabel eftersom inkluderingen av den kvadratiska termen ansågs bättre representera det faktiska förhållandet.

På grund av den signifikanta interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* bör dessa faktorer inte tolkas separat. Figur 7 visar att lutningen förändras beroende på faktorernas nivåer. Lutningen är som brantast vid låg nivå av *Varvtal* i kombination med hög *Ingående tonnage*. Vid höga nivåer av *Varvtal* har däremot ett ökande *Ingående tonnage* en marginell påverkan på *Effekt*. Överlag leder ett högre *Ingående tonnage* till en ökad *Effekt*, förutsatt att *Varvtalet* är lågt eller på medelnivå. Omvänt leder ett högre *Varvtal* till en minskad *Effekt*. En högre *Malstenskvot* resulterar däremot oberoende av övriga faktorer i en ökad *Effekt*.

En hög *Effekt* är önskvärd (utan att överskrida 2.07 i standardiserat värde), eftersom detta ofta indikerar en finare nedmalningsgrad (finare *Yta*), vilket också stöds av den starka korrelationen mellan *Effekt* och *P45*. För att uppnå en *Effekt* på minst 0.493 (standardiserat värde) bör *Ingående tonnage* vara större än -0.562, *Varvtal* mindre än 0, och *Malstenskvot* större än 0. Detta illustreras i figur 9, där exakta nivåer av faktorerna beror på varandra för att uppnå önskad *Effekt*.

Residualdiagrammen visar att residualerna verkar följa en normalfördelning, har konstant varians och saknar tidsberoende, vilket tyder på att normalfördelningsantagandet är uppfyllt.

6.3 Lagertryck

Den reducerade modellen inkluderar huvudeffekterna för *Ingående tonnage*, *Varvtal* och *Malstenskvot*, en kvadratisk term för *Varvtal*, samt interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*. Alla dessa termer är signifikanta vid $\alpha = 0.05$.

Eftersom det finns en signifikant interaktion mellan *Varvtal* och *Ingående tonnage*, bör dessa faktorer inte tolkas separat. Liksom för responsvariabeln *Effekt* förändras endast lutningens magnitud när nivåerna av faktorerna varieras (se figur F2 i Bilaga F). Den brantaste lutningen observeras vid högt *Ingående tonnage* och lågt *Varvtal*. Vid ett högt *Varvtal* har däremot ett ökande *Ingående tonnage* marginell påverkan på *Lagertryck*. Generellt leder ett ökat *Ingående tonnage* till högre *Lagertryck*, förutsatt att *Varvtalet* är på en låg eller medelhög nivå. Vid högre *Varvtal* däremot, minskar *Lagertrycket*. Oavsett nivå på de övriga faktorerna, bidrar en högre *Malstenskvot* alltid till ett högre *Lagertryck*.

Residualdiagrammen (figur F1, Bilaga F) visar att residualerna för *Lagertryck* är ungefär normalfördelade, uppvisar konstant varians och saknar autokorrelation i förhållande till körordningen. Detta tyder på att modellens grundläggande antaganden är uppfyllda. Observation 8 har dock en ovanligt stor residual, vilket antyder att det kan vara en uteliggare. I detta fall innebär det att modellen underskattar det faktiska *Lagertrycket*. Eftersom mätvärdena är insamlade efter att processen stabiliserats, bedöms dock observationen som rimlig och inte felaktig.

6.4 PSI

Den reducerade modellen för *PSI* inkluderar termerna för *Ingående tonnage* och *Varvtal*, samt interaktionen mellan dessa två faktorer. *Malstenskvot* är inte signifikant på $\alpha = 0.05$-nivån. Modellsammanfattningen visar ett justerat $R^2 = 67.73\%$, vilket är högt, särskilt med tanke på att detta mätinstrument är placerat efter sekundärkvarnen, vilket innebär ytterligare ett malningssteg.

Den signifikanta interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* visas i figur G2, Bilaga G, där det tydligt framgår att effekten av den ena faktorn är starkt beroende av den andra. För att erhålla ett högre *PSI*-värde är det att föredra att använda ett lägre *Varvtal* tillsammans med ett högre *Ingående tonnage*. Denna interaktion visas även i figur G4, Bilaga G, där det återigen är tydligt att ett lägre *Varvtal* och ett högre *Ingående tonnage* ger fördelaktigare resultat för *PSI*. Vid lägre *Varvtal* sker sannolikt en mer nötande malning, vilket skulle kunna leda till en finare nedmalning. I kombination med ett högre *Ingående tonnage* ökar även den totala massan i kvarnen, vilket kan medföra ett högre tryck på malmen. Detta skulle kunna förklara varför modellen indikerar ett högre *PSI*-värde under dessa förhållanden. Det bör dock betonas att detta är tolkningar baserade på modellens utfall och inte teoretiskt bekräftade samband.

Normalfördelningsdiagrammet (se figur G1, Bilaga G) visar att residualerna inte följer en normalfördelning, då vissa residualer uppvisar en lätt S-formad struktur. Detta kan bero på att modellen inte inkluderar alla faktorer som påverkar PSI, såsom *Pebblesförbrukning* i pebbleskvarnen, eftersom pebbleskvarnen inte kontrollerades i denna försöksplan. Därmed saknas viss relevant information i modellen, vilket kan ha påverkat F-värden och P-värden.

Samtidigt visar normalfördelningstestet, se tabell G3 i Bilaga G, att nollhypotesen om normalfördelning inte kan förkastas, vilket innebär att residualerna statistiskt sett kan antas följa en normalfördelning. Trots detta tyder normalfördelningsdiagrammet på att viktiga faktorer kan saknas i modellen.

Det är även värt att nämna att *PSI*-värdena ofta återhämtade sig under de olika försöken, vilket sannolikt hänger samman med hydrocyklonernas funktion i processen. Dessa sorterar kontinuerligt bort grova partiklar, vilket kan ha förhindrat att extremt låga *PSI*-värden uppstod. Under de försök där mycket låga *Effekter* noterades, vilket ofta tyder på grövre malning, bör de cirkulerande lasterna ha ökat. Detta har dock inte följts upp inom ramen för detta projekt, och därför kan inga säkra slutsatser dras kring detta samband.

Med bakgrund av detta kan det även förklara varför modellen för *PSI* visar acceptabla värden vid höga varvtal i kombination med låga tonnage. Det är viktigt att notera att modellen för *P45*, vilket mäter nedmalningen från autogenmalningskretsen, samtidigt indikerar att nedmalningen i dessa fall inte är tillräcklig, vilket tyder på att PSI-modellen inte fullt ut fångar sambanden mellan faktorerna och nedmalningen i detta område.

Vidare uppvisar modellen en stor standardiserad residual för försök nummer 3, som motsvarar ett av mittpunktsreplikaten. Detta tyder på att observationen kan vara en uteliggare. I detta försök noterades ett högre *PSI*-värde jämfört med de övriga replikaten vid samma inställningar. Detta behöver dock inte innebära ett fel utan kan spegla den naturliga variationen i processen, där exempelvis det ingående materialets sammansättning och storleksfördelning kan variera och påverka utfallet.

6.5 P45

Den reducerade modellen för *P45* innehåller huvudeffekterna för alla faktorer, den kvadratiska termen för faktorn *Ingående tonnage*, samt en interaktionsterm mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*. Alla termer, förutom interaktionstermen, är signifikanta på $\alpha = 0.05$-nivån. Interaktionstermen är mycket nära signifikansnivån, och behölls på grund av att denna interaktion dels är signifikant för flertalet andra responsvariabler, och eftersom inkluderingen av denna term ökade både det justerade R^2 och det prediktiva R^2. Detta innebär att modellen förklarar variansen bättre och förbättrar prediktionerna av nya observationer.

Interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* visas i figur H2, Bilaga H. Denna interaktion är, som tidigare nämnt, inte signifikant, men det går att observera skillnader i lutningen mellan de olika faktornivåerna. För att erhålla ett lägre *P45* är det tydligt från figuren att ett lägre *Varvtal* är att föredra. Likt tidigare resonemang för *PSI*, sker förmodligen mer nötande malning vid ett lågt *Varvtal*, vilket verkar vara mer fördelaktigt än krossande malning. Från figuren går det också att se att ett högre *Ingående tonnage* leder till ett lägre *P45*, vilket också överensstämmer med diskussionen från *PSI*. Däremot, om *Varvtal* är högt, kommer *P45* att börja öka igen när *Ingående tonnage* överstiger nivå 0. Därmed, för att hålla *Ingående tonnage* vid en hög nivå (för att producera mer järnmalmsslurry), bör *Varvtal* hållas lågt. Vidare kan även nedmalningen styras med *Malstenskvoten*, som uppvisar en nedåtgående lutning (se figur H3, Bilaga H). Detta innebär att för att erhålla en finare nedmalning bör *Malstenskvoten* höjas.

I figur H4, Bilaga H, visas konturplottar för *P45* mellan de tre faktorerna. Eftersom denna responsvariabel inte mäts frekvent, finns det inga referenser kring vad *P*45 bör ha för värde. För att erhålla ett värde att förhålla sig till, sorterades alla observationer med en *Effekt* > -0.080 ut. Detta gjordes eftersom en högre *Effekt* generellt leder till en finare nedmalningsgrad, se korrelationsmatris i figur (5). Eftersom $\mathit{Effekt} = -0.080$ är den lägre gränsen, togs det största värdet på *P45* från dessa observationer, vilket sedan får representera den övre gränsen för denna responsvariabel, vilket är $P45_{\max} = -0.320$. Med detta som referens, för att erhålla $P45 < -0.320$, bör *Varvtal* generellt vara < 0 och *Malstenskvot* > -1. *Ingående tonnage* har ingen särskild begränsning, men de faktiska nivåerna av alla tre faktorer är beroende av varandra för att erhålla rätt nedmalmingsgrad.

Normalfördelningsdiagrammet, se figur H1 i Bilaga H, visar att residualerna verkar följa en någorlunda rak linje. Residualerna mot de anpassade värdena visar inga tecken på ökande varians, vilket stärker antagandet om konstant varians. Histogrammet av residualer visar däremot fler negativa residualer, vilket möjligtvis tyder på en vänsterskev fördelning. Residualerna plottade mot körordning faller slumpmässigt kring nolllinjen, vilket tyder på att det inte finns någon korrelation mellan observationerna. Överlag verkar normalfördelningsantagandet vara uppfyllt.

6.6 Pebblesproduktion

De signifikanta faktorerna för responsvariabeln *Pebblesproduktion* är *Varvtal* och *Malstenskvot*. *Ingående tonnage* är däremot inte signifikant, vilket var förvånande eftersom det antogs att ju mer malm som matas in i kvarnen, desto mer pebbles bör produceras. Det vill säga, om både *Varvtal* och *Malstenskvot* hålls konstanta, antas en ökning av *Ingående tonnage* leda till en ökning i *Pebblesproduktionen*. Vidare, genom att inkludera *Ingående tonnage* i modellen, ökade det justerade R^2 från 69.31% till 71.19%, och det prediktiva R^2 ökade från 61.21% till 64.23%. På grund av detta behölls *Ingående tonnage* i modellen.

Huvudeffekterna visas i figur I2, Bilaga I. Ett högre *Varvtal* leder till en högre *Pebblesproduktion*. Detta kan härledas till att med ett högre *Varvtal* kastas materialet runt mer i kvarnen och omloppstiden minskar. Det innebär att avskiljningen av pebbles från kvarnen sker snabbare.

En högre *Malstenskvot* leder däremot till en minskad *Pebblesproduktion*. Detta är rimligt, eftersom pebbles är stenar i storlek $6-30$ mm, medan malsten är större än 30 mm. Om andelen stenar större än 30 mm ökar, minskar andelen stenar i storleken $6-30$ mm, vilket leder till en minskad *Pebblesproduktion*. En annan förklaring kan vara att om *Malstenskvoten* ökar, så kommer den ökade mängden malsten att krossa mer av fraktionen som är 6-30mm.

Ingående tonnage har också en positiv påverkan på *Pebblesproduktionen*, där ett högre *Ingående tonnage* resulterar i en högre *Pebblesproduktion*. Som tidigare diskuterats, beror detta på att om *Ingående tonnage* ökar, kommer mängden pebbles i kvarnen att öka, och därmed kommer mer pebbles att produceras.

Normalfördelningsdiagrammet i figur I1, Bilaga I, visar att residualerna följer den raka linjen väl. Residualerna plottade mot de anpassade värdena visar inga tendenser på ökande varians. Histogrammet av residualer har en symmetrisk form som är centrerad runt noll. Dessa resultat stärker normalfördelningsantagandet. Däremot, i plotten som visar residualer mot körordning, finns vissa trender. Först ökar residualerna, för att sedan minska, och till sist öka igen.

Detta indikerar att residualerna inte är helt oberoende av varandra. Som tidigare nämnt produceras pebbles bland annat från fraktionen $6-30$ mm av det ingående godset. Om denna fraktion ökar, kommer även *Pebblesproduktionen* att öka. Den observerade trenden i residualplotten kan därför bero på variationer i denna fraktion. Eftersom denna fraktion inte mäts, går det inte att verifiera denna hypotes.

6.7 Specifik energiförbrukning (kWh/Ton)

Den reducerade modellen för *kWh/Ton* inkluderar *Ingående tonnage*, *Varvtal*, *Malstenskvot* samt interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*. Alla termer förutom huvudeffekten *Ingående tonnage* är signifikanta på $\alpha = 0.05$-nivån. På grund av den signifikanta interaktionen behölls *Ingående tonnage*.

kWh/Ton beror både på *Effekt* och *Pebblesproduktion*. Även om modellen för *Effekt* inkluderar en kvadratisk term för *Varvtal*, så gör inte modellen för *Pebblesproduktion* det. Vidare observerades en uteliggare (observation 8) för modellen utan den kvadratiska termen, där modellen underanpassade den specifika energiförbrukningen. När den kvadratiska termen lades till försvann denna uteliggare, men det resulterade i en markant minskning av det prediktiva R^2, vilket ledde till att den kvadratiska termen exkluderades.

I figur J5, Bilaga J, visas interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*. Från denna är det tydligt att ett lägre *Varvtal* i kombination med ett högre *Ingående tonnage* resulterar i en högre specifik energiförbrukning. Eftersom *Ingående tonnage* bör hållas på en hög nivå för att producera mer järnmalmsslurry, behöver *Varvtal* höjas för att minimera den specifika energiförbrukningen. Huvudeffekterna visas i figur J6, Bilaga J. Här är *Malstenskvoten* särskilt intressant eftersom den inte ingår i någon interaktion med de andra faktorerna. *Malstenskvot* har en positiv påverkan på den specifika energiförbrukningen, vilket innebär att om *Malstenskvoten* ökar, så ökar även specifika energiförbrukningen. Detta är förväntat eftersom malstenen är en större sten som ofta kräver mer energi för att malas ned till önskad storlek.

I figur J7, Bilaga J, visas konturplottar för *kWh/Ton* som funktion av de tre faktorerna. Det framgår tydligt att *Varvtalet* har en stark påverkan på den specifika energiförbrukningen. Eftersom det är önskvärt, ur produktionssynpunkt, med både hög *Effekt* och ett högt *Ingående tonnage*, samtidigt som *kWh/Ton* bör hållas så låg som möjligt, är det mer fördelaktigt att reglera den specifika energiförbrukningen genom att justera *Varvtalet* (och *Malstenskvoten*) snarare än att minska *Ingående tonnage*.

Konturplotten visar också att den specifika energiförbrukningen vid höga *Varvtal* är lägre vid höga *Ingående tonnage* jämfört med låga. Detta kan troligen förklaras av interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* för responsvariabeln *Effekt*. När *Varvtalet* är högt (≥ 73) leder en ökning av *Ingående tonnage* inte till någon nämnvärd ökning i *Effekt*. Eftersom *kWh/ton* beräknas genom att dividera *Effekt* med skillnaden mellan *Ingående tonnage* och *Pebblesproduktion*, innebär detta att kvoten minskar när *Ingående tonnage* ökar, vilket förklarar den lägre specifika energiförbrukningen vid höga *Ingående tonnage* och *Varvtal*.

Normalfördelningsdiagrammet (figur J4, Bilaga J) visar att residualerna ungefär följer en rak linje, och histogrammet av residualerna verkar vara någorlunda normalfördelat, även om det är något vänsterskevt. Diagrammet över residualerna mot de anpassade värdena antyder möjligtvis en ökande varians, men med så få observationer är det svårt att avgöra. Residualerna mot körordningen visar inga tecken på korrelation, vilket innebär att de kan antas vara oberoende. Sammantaget verkar normalfördelningsantagandena vara uppfyllda.

6.8 Maximera produktionen

I figur 10 visar det tillåtna styrområdet vid en grövre malning, där de begränsande responsvariablerna är *Pebblesproduktion*, *P45* och *Effekt*. Figurerna visar att det tillåtna området ökar vid högre *Malstenskvot*.

Vid ökande *Malstenskvot* expanderar områdena för både *P45* och *Pebblesproduktion*, särskilt genom att *Pebblesproduktionen* inte längre begränsar området uppåt. Samtidigt förskjuts den övre gränsen för *Effekt* uppåt, vilket minskar området från undersidan.

För att maximera produktionen vid en grövre malning rekommenderas en *Malstenskvot* på +1. Vid denna *Malstenskvot* visar figur 10c att *Ingående tonnage* kan vara 1.682, och *Varvtalet* kan varieras mellan cirka $-0.5 - 0$. Om den övre gränsen för *Pebblesproduktion* inte beaktas, visar samtliga plottar att en ytterligare ökning av *Ingående tonnage* vore möjlig. Detta eftersom kurvorna för *P45* och *Effekt* ännu inte korsats i någon av plottarna. Därför tyder resultaten på att *Ingående tonnage* skulle kunna höjas ytterligare. Dock är differensen mellan *P45* och *Effekt* störst vid lägre *Malstenskvoter*, vilket kan indikera att det potentiellt maximala *Ingående tonnaget* är högre vid dessa nivåer. Detta förutsätter dock att en ökning av tonnaget inte leder till en oproportionerligt hög *Pebblesproduktion*. Redan vid en övre gräns på 0.498 för *Pebblesproduktion* upphör denna responsvariabel att vara begränsande för de lägre *Malstenskvoterna*.

Eftersom tonnagenivåer över +1.682 inte har testats inom ramen för detta projekt, krävs vidare tester för att fastställa den optimala *Malstenskvoten* vid dessa nivåer. Givet de nuvarande förutsättningarna och faktornivåerna är det mer fördelaktigt att höja *Malstenskvoten*, eftersom detta möjliggör samma *Ingående tonnage* men med en lägre *Pebblesproduktion*.

Om en finare malning krävs, exempelvis vid en alltför grov *Yta*, samtidigt som produktionen ska maxime-

ras, illustreras de tillåtna områdena i figur 11. I detta fall begränsas området uppåt av *PSI* och *P45*, medan *Pebblesproduktionen* fortsatt utgör en begränsning vid låg *Malstenskvot*.

Vid högre *Malstenskvot* förskjuts den övre gränsen för *Effekt* uppåt, vilket minskar det tillåtna området. Samtidigt blir *P45*- och *PSI*-gränserna snävare ovanifrån, vilket bidrar till en finare malning. På grund av detta är alltför höga *Malstenskvoter* inte fördelaktiga. Det största tillgängliga området vid fin malning observeras vid en *Malstenskvot* på 0, vilket därmed rekommenderas i de fall där en finare malning krävs.

Likt tidigare resonemang har kurvorna för *Effekt* och *P45* inte korsats vid ett *Ingående tonnage* på +1.682, särskilt vid lägre *Malstenskvoter*. Detta tyder på att produktionen potentiellt kan ökas ytterligare vid finare malning, förutsatt att en högre *Pebblesproduktion* accepteras. För att avgöra den optimala *Malstenskvoten* i detta område och säkerställa att *Pebblesproduktionen* inte blir överdrivet stor, krävs dock fler tester vid *Ingående tonnage* över +1.682.

6.9 Minimera specifik energiförbrukningen

I figur 12 visas de tillgängliga områdena för en mer energisnål produktion vid grövre malning. Den övre gränsen för *kWh/Ton* motsvarar en specifik energiförbrukning som är cirka 13.8% lägre än det historiska medelvärdet, beräknat utifrån den ursprungliga (icke-standardiserade) processdatan. Vid lägre *Malstenskvoter* begränsas det tillgängliga området kraftigt av den övre gränsen för *Pebblesproduktionen*. Om denna begränsning bortses (se figur 13a) från blir det tillgängliga området betydligt större vid lägre *Malstenskvoter*, vilket underlättar styrningen för att hitta optimala inställningar.

Vid högre *Malstenskvoter*, även om den övre gränsen för *P45* förskjuts uppåt, minskas det tillgängliga området snabbt av den begränsande responsvariabeln *kWh/Ton*. Därför är det mer fördelaktigt att använda lägre *Malstenskvoter* om målet är att köra mer energisnålt. Om en något högre *Pebblesproduktion* accepteras, vilket visas i figur 13a, upphör *Pebblesproduktionen* att vara en begränsande variabel, vilket möjliggör ett högre *Ingående tonnage*.

För att uppnå en mer energisnål drift rekommenderas en *Malstenskvot* på -0.56%, där det tillgängliga området är som störst. Om dessutom en något högre *Pebblesproduktion* accepteras, förblir området tillåtet upp till ett *Ingående tonnage* på +1.682. Detta är fördelaktigt eftersom den relativa skillnaden mellan *Ingående tonnage* och *Pebblesproduktionen*, uttryckt i ursprungliga enheter, motsvarar en ökning på cirka 120%. Då de övre begränsande kurvorna för *Effekt* och *kWh/Ton* ännu inte har korsats, kan *Ingående tonnage* eventuellt öka ytterligare.

I figur 13b visas området för grövre malning med en lägre övre gräns för den specifika energiförbrukningen, vilket motsvarar 20.9% lägre specifik energiförbrukning jämfört med det historiska medelvärdet. Området är litet men visar att en betydligt lägre specifik energiförbrukning är möjlig. *Ingående tonnage* kan variera mellan cirka -1 och +0.3, *Varvtal* kan variera mellan -1.682 och -0.4, och *Malstenskvoten* är -0.56. Om en *Pebblesproduktion* på 0.498 accepteras, kan *Ingående tonnage* öka till +1.2, och *Varvtal* till cirka -0.2.

När finare malning krävs justeras *P45* till -0.810 och *PSI* till 0.126. De tillgängliga områdena vid olika *Malstenskvoter* visas i figurerna 14. Eftersom finare malning krävs, har de tillgängliga områdena blivit kraftigt begränsade av den övre gränsen för *P45*. När *Malstenskvoten* ökar, förskjuts den övre gränsen för *P45*

uppåt, men eftersom den övre gränsen för *kWh/Ton* ökar snabbare, minskar det tillgängliga området.

För att uppnå en specifik energiförbrukning under 0.760, behöver *Malstenskvoten* vara -1. *Ingående tonnage* kan variera mellan cirka -0.56 och +1.1, och *Varvtal* kan variera mellan -1.682 och -0.8 n-krit (se figur 14a). Om en *Pebblesproduktion* på 0.498 accepteras, begränsas inte området av *Pebblesproduktionen*, vilket gör att *Ingående tonnage* kan öka till cirka +1.682. Detta motsvarar en relativ ökning, i ursprungliga enheter, på cirka 120% mellan *Ingående tonnage* och *Pebblesproduktionen*.

Det är även möjligt att uppnå en specifik energiförbrukning under 0.378 vid finare malning (se figur 14b), vilket motsvarar 18.9% lägre specifik energiförbrukning jämfört det historiska medelvärdet. Området är dock mycket litet, vilket gör det svårt att hitta. *Ingående tonnage* kan variera mellan cirka -0.4 och +0.6, *Varvtal* kan variera mellan -1.682 och -0.9, och *Malstenskvoten* är -1. För att hitta detta område, jämfört med området med en energiförbrukning 0.760, krävs en sänkning av *Ingående tonnage*. Detta kan vara fördelaktigt om nästkommande produktionssteg efter anrikningsverket börjar bli fullt, eftersom produktionen då inte längre behöver köras i full takt.

7 Slutsatser

1: Finns det en optimal varvtalsnivå för alla responsvariabler? Vad är den optimala varvtalsnivån för varje specifik responsvariabel? Hur påverkas responsvariablerna av en lägre varvtalsnivå jämfört med vad som används idag?

För responsvariabeln *Effekt* har *Varvtal* en negativ effekt, vilket innebär att en ökning av *Varvtal* leder till en minskning av *Effekt*. Detta framgår tydligt både i huvudeffektplotten och konturdiagrammet. Eftersom det inte finns ett entydigt optimalt *Varvtal*, då nivåerna påverkas även av *Ingående tonnage* och *Malstenskvot*, bör *Varvtal* hållas mellan $[-1.682, 0]$ för att *Effekt* ska hålla sig inom toleransgränserna på mellan $[-0.080, 1.640]$.

Ett liknande samband gäller för *Lagertryck*. Trots att sambandet mellan *Varvtal* och *Lagertryck* är kvadratiskt, så leder ett högre *Varvtal* generellt till ett lägre *Lagertryck*. Nivån på *Lagertryck* påverkas även av *Ingående tonnage* och *Malstenskvot*, men för att hålla *Lagertryck* inom intervallet $[-0.170, 3.126]$, bör *Varvtal* ligga mellan cirka $[-1.682, +0.5]$.

När det gäller *PSI* innebär ett högre *Varvtal* vanligtvis ett lägre *PSI*-värde. Detta beror dock på nivån på *Ingående tonnage*, då en signifikant interaktion mellan dessa två faktorer föreligger. För att optimera nedmalningsgraden rekommenderas ett lägre *Varvtal*. I det nedre högra området av figur G4, Bilaga G, syns tendenser på att *Varvtal* kan sänkas ytterligare för att förbättra nedmalningen. Eftersom *PSI* justeras baserat på den senaste *Ytan*, där den ökar om *Yta* var för grov och minskar om den var för fin, finns det inget entydigt optimalt intervall. Generellt sett bör *PSI* vara mellan $[-0.976, 2.331]$, vilket innebär att hela intervallet ($[-1.682, +1.682]$) för *Varvtal* är möjligt beroende på nivå för *Ingående tonnage*, men lägre nivåer verkar vara att föredra för att optimera nedmalningen.

Ett högre *Varvtal* leder till en högre *Pebblesproduktion*. För att producera mindre än 0.498 *Pebbles* är hela intervallet för *Varvtal* tillgängligt. Beroende på *Malstenskvot*, gäller att ju lägre *Malstenskvot*, desto lägre bör *Varvtal* vara. För att producera mindre än -0.666 *Pebbles* bör *Varvtalet* generellt sett inte överstiga 0, men exakt nivå beror främst på *Malstenskvoten*.

Liksom för *Effekt* resulterar ett högre *Varvtal* generellt i en lägre *kWh/Ton*, vilket är förväntat eftersom *kWh/Ton* beräknas från *Effekt*. Den specifika energiförbrukningen beror på både *Ingående tonnage* och *Malstenskvot*, men för att hålla den specifika energiförbrukningen (*kWh/Ton*) under 2.032 bör *Varvtal* vara minst -1, men exakt nivå beror av både *Ingående tonnage* och *Malstenskvoten*. Om *Malstenskvoten* är lägre är det möjligt att uppnå en energiförbrukning på under 0.124 vid *Varvtal*-nivå på -1.682.

Interaktionsplotten H2 samt konturplotten H4 visar tydligt att ett lägre *Varvtal* generellt leder till en finare nedmalning (lägre *P45*). Nedmalningsgraden beror på både *Ingående tonnage* och *Malstenskvot*, men generellt kommer ett lägre *Varvtal* att resultera i en mer finmald produkt.

För att sammanfatta, om *Ingående tonnage* antas vara på sin högsta nivå, +1.682, och *Malstenskvot* = 0, så är de optimala *Varvtalen* för varje responsvariabel:

1. *Effekt*: $[-1, 0]$
2. *Lagertryck*: $[-1.5, 0.1]$

3. *PSI*: < 0.4
4. *P45*: < 0
5. *Pebblesproduktion*: < 0
6. *KWh/Ton*: > 0

Därmed finns det inte en optimal nivå för alla responsvariabler, eftersom ett högre varvtal krävs för att minimera energiförbrukningen (*KWh/Ton*). Valet av optimalt *Varvtal* beror på om syftet är att maximera produktionen eller att minimera energiförbrukningen. Om minimering av energiförbrukningen inte är prioriterat, är det optimala intervallet för *Varvtalet* $[-1, 0]$.

2: Malstenskvot: Hur påverkar Malstenskvoten responsvariablerna? Hur kan en körstrategi utformas för att styra Malstenskvoten på ett sätt som leder till optimala responsvärden?

Eftersom *Malstenskvoten* inte interagerar med vare sig *Varvtal* eller *Ingående tonnage*, räcker det att analysera dess huvudeffekt på responsvariablerna. För *Effekt*, *Lagertryck* och *kWh/Ton* har *Malstenskvoten* en positiv effekt. Den grövre fraktionen kräver mer energi för att malas ned till produkt, vilket gör att både effektuttaget och energiförbrukningen (*kWh/Ton*) ökar.

För responsvariablerna *P45* och *Pebblesproduktionen* ses ett avtagande samband med *Malstenskvoten*, där en högre kvot leder till finare malning i primärkvarnen. Samtidigt minskar *Pebblesproduktionen* med en högre *Malstenskvot*, antingen för att andelen 6–30 mm sten i det ingående godset minskar, eller för att den ökade mängden grövre sten (+30 mm) krossar den mindre fraktionen.

För *PSI* ses ingen påverkan av *Malstenskvoten*. Detta kan förklaras med att *PSI* mäts efter sekundärkvarnen, där ytterligare malning sker med *pebbles* som malmedia.

Styrningen av *Malstenskvoten* bör anpassas efter processens mål. Om syftet är att maximera produktionen är en högre *Malstenskvot* fördelaktig, eftersom styrintervallet för flera responsvariabler blir bredare. Om målet däremot är att minimera den specifika energiförbrukningen är det mer gynnsamt att sänka *Malstenskvoten*, då grövre fraktioner kräver mer energi. I detta fall blir inte *kWh/Ton* begränsande, men däremot kan *Pebblesproduktionen* bli det.

Om syftet är att både minska den specifika energiförbrukningen och bibehålla hög produktion kan en viss ökning i *Pebblesproduktionen* accepteras, då effekten av ökat *Ingående tonnage* överväger ökningen av *Pebblesproduktion*.

Dagens kvarnstyrning innebär att *Varvtal* används för att styra *Effekt* och *Lagertryck*, medan *Ingående tonnage* styr *PSI*. Det finns alltså ingen reglering av *Pebblesproduktionen*. Eftersom *Malstenskvoten* i nuläget inte ingår i någon reglering, skulle den kunna användas som styrvariabel för att kontrollera och justera *Pebblesproduktionen*.

3: Maximera produktionen: Vilka kombinationer av nivåer för faktorerna Varvtal och Malstenskvot tillåter högsta möjliga nivå av Ingående tonnage, samtidigt som responsvariablerna Effekt, Lagertryck och PSI hålls inom sina toleransgränser, för att maximera produktionen av järnmalmsslurry?

Eftersom produktionen inte har kunnat mätas direkt i detta projekt, har en högre nivå av *Ingående tonnage* tolkats som en högre produktion. Den högsta nivå som testades var +1.682, vilket i detta sammanhang används som referens för hög produktion. För att uppnå denna nivå vid grövre malning bör *Malstenskvoten* vara +1, och *Varvtalet* bör ligga mellan cirka -0.4 och +0.1 (se figur 10c). En hög *Malstenskvot* skapar ett större tillgängligt styrintervall, vilket underlättar för regleringen att återfinna det optimala området.

Om finare malning krävs (*PSI* = 0.126, *P45* = -0.810), erhålls det bredaste tillgängliga området vid *Malstenskvot* = 0. Detta kan verka kontraintuitivt, eftersom en högre *Malstenskvot* leder till finare malning. Men eftersom en ökad *Malstenskvot* också höjer *Effekten*, kommer dess övre gräns i vissa fall att bli begränsande, vilket minskar det tillgängliga området för styrning. Det innebär att trots att högre *Malstenskvot* generellt ger finare malning, så begränsas området där regleringen kan verka på grund av effektbegränsningen. Med samma resonemang som tidigare eftersträvas ett så brett område som möjligt, vilket erhålls vid *Malstenskvot* = 0.

Samtliga överlagda konturdiagram för produktion visar att det vore möjligt att ytterligare öka *Ingående tonnage*, eftersom kurvorna för *Effekt* och *P45* ännu inte har korsat varandra. Om den övre gränsen för *Pebblesproduktionen* höjs till 0.498, upphör denna responsvariabel att vara begränsande vid samtliga *Malstenskvoter*. Eftersom det bredaste området då återfinns vid låga *Malstenskvoter*, det vill säga där avståndet mellan övre gränsen för *P45* och *Effekt* är störst, skulle detta kunna möjliggöra ännu högre *Ingående tonnage*.

Eftersom ett *Ingående tonnage* över +1.682 inte har testats inom ramen för detta projekt, går det dock inte att säkerställa. Fler försök med högre *Ingående tonnage* och varierad *Malstenskvot* behövs för att fastställa var maximal produktion kan uppnås.

4: Specifik energiförbrukning: Vilka kombinationer av faktornivåer resulterar i lägst specifik energiförbrukning? Är det möjligt att minska den utan att kompromissa med produktionsvolymen av järnmalmsslurry eller kvalitet (PSI och P45)?

För att uppnå lägst specifik energiförbrukning bör, enligt figur J7 (Bilaga J), både *Varvtalet* och *Ingående tonnage* vara höga. Vidare bör *Malstenskvoten* hållas låg för att minimera den specifika energiförbrukningen. Dessa inställningar ger dock inte optimala förhållanden för övriga responsvariabler. Figur 13b visar det område där både låg specifik energiförbrukning och acceptabla värden för övriga responser kan uppnås. Här är det möjligt att uppnå en specifik energiförbrukning (*kWh/ton*) under 0.124 vid grövre malning (*PSI* = -0.976, *P45* = -0.320). Detta område är dock relativt smalt och återfinns vid *Malstenskvot* = -0.56, *Varvtal* mellan $[-1.682, -0.5]$ samt *Ingående tonnage* mellan $[-1, +0.2]$. Om en *Pebblesproduktion* på 0.498 accepteras, kan *Ingående tonnage* höjas till cirka +1.2.

Vid finare malning, det vill säga *PSI* = 0.126 och *P45* = -0.810, kan en specifik energiförbrukning (*kWh/ton*) på 0.378 uppnås (figur 14b). Det motsvarande området återfinns vid *Varvtal* mellan $[-1.682, -0.8]$, *Ingående tonnage* mellan $[-0.4, +0.7]$, och *Malstenskvot* = -1. Även detta område är begränsat, men visar att energisnål drift är möjlig även vid finmalning, utan att kompromissa med produktionsvolym eller kvalitet.

5: Pebblesproduktion: Hur påverkas pebblesproduktionen av primärkvarnens inställningar, och hur kan den ökas eller minskas beroende på sekundärkvarnens behov?

Sekundärkvarnens behov av pebbles har ett historiskt medelvärde på -4.2 (se tabell 2), vilket är lägre än den *Pebblesproduktion* som uppmätts under detta projekt. Tidigare har det förekommit brist på pebbles, vilket har lett till problem i sekundärkvarnen. Även om mängden pebbles beror på det ingående materialets sammansättning, går den att påverka genom justeringar av primärkvarnens inställningar.

I detta projekt har *Pebblesproduktionen* konsekvent överstigit sekundärkvarnens behov, och därför ligger fokus här på hur produktionen kan minimeras. Det är särskilt relevant eftersom *Pebblesproduktion* kan bli en begränsande variabel vid låga *Malstenskvoter*. För att minimera *Pebblesproduktion* bör *Ingående tonnage* vara lågt, *Varvtal* lågt och *Malstenskvoten* hög. Eftersom målet ofta är att maximera produktionen, är det inte alltid önskvärt att sänka *Ingående tonnage*. Dessutom har *Ingående tonnage* inte någon signifikant påverkan på *Pebblesproduktionen*, vilket gör det mer relevant att i första hand reglera *Varvtal* och *Malstenskvot* för att minska pebblesproduktionen.

Om en pebblesbrist skulle uppstå, kan pebblesproduktionen istället ökas genom att höja *Varvtalet* och/eller sänka *Malstenskvoten*.

6: Interaktioner och korrelationer: Vilka interaktioner finns mellan faktorerna och hur korrelerar responsvariablerna?

En signifikant interaktion mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* återfinns för responsvariablerna *Effekt*, *Lagertryck*, *PSI* och *kWh/Ton*. Även modellen för *P45* inkluderar denna interaktion, men är inte signifikant på $\alpha = 0.05$-nivån. För *Effekt* och *Lagertryck* innebär interaktionen en förändring i lutningens magnitud: högre *Ingående tonnage* leder till ökade värden, medan högre *Varvtal* tvärtom minskar dem. Interaktionen visar att påverkan från en faktor är beroende av nivån på den andra. Ett liknande samband ses även för *P45*.

För *PSI* och *kWh/Ton* är interaktionen ännu mer tydlig, då linjerna för faktornivåerna korsar varandra. Detta tyder på att effekten av den ena faktorn starkt beror på värdet på den andra.

Starka korrelationer återfinns mellan nästan samtliga responsvariabler, med undantag för *Pebblesproduktion* och *PSI*, som visar svag korrelation. Den starkaste korrelationen ses mellan *Effekt* och *kWh/Ton*.

En särskilt intressant observation gäller sambandet mellan *P45* och *PSI* i relation till variablerna *Effekt*, *Lagertryck* och *kWh/Ton*. Både *P45* och *PSI* mäter graden av nedmalning, men *PSI* mäts efter pebbleskvarnen, medan *P45* för närvarande inte mäts alls. Trots detta visar *P45* starkare korrelationer med övriga responsvariabler. Detta antyder att installation av ett mätinstrument för frekvent *P45*-mätning i autogenmalningskretsen skulle kunna förbättra processens styrbarhet. En sådan åtgärd skulle möjliggöra direktkoppling mellan faktorer och nedmalning, vilket skulle underlätta optimering av kvarninställningarna.

Slutligen visar den starka negativa korrelationen mellan *P45* och *KWh/Ton* ($r = -0.899$) att finare nedmalning kräver mer energi.

7.1 Framtida rekommendationer

För att bygga vidare på denna studies resultat och fördjupa förståelsen av autogenmalningsprocessen rekommenderas följande åtgärder och studier:

- Fler tester bör genomföras för att både verifiera de resultat som presenteras i denna studie och för att undersöka hur sambanden mellan faktorer och responsvariabler påverkas vid olika rågodskvaliteter. Detta är viktigt då variation i råmaterialets egenskaper har stor påverkan på autogenmalningen.
- En liknande experimentell studie bör utföras på en autogenkvarn med ny infodring, för att undersöka om och hur resultaten skiljer sig jämfört med en insliten infodring. Skillnader i kvarnens infodring kan påverka malningsprocessens dynamik och effektivitet.
- Tester med variation i vattenspädning (*vikt%fast*) bör genomföras för att utforska hur denna faktor påverkar autogenmalningen.
- I denna studie har endast styrfaktorer kopplade till autogenkvarnen varierats systematiskt, medan pebbleskvarnen varit i drift under samtliga försök men utan att dess inställningar ändrats. För att möjliggöra en helhetsanalys och optimering av hela malningsprocessen rekommenderas en utökad studie där även styrfaktorer för pebbleskvarnen ingår i försöksplaneringen.
- Cirkulerande laster från både skruvklasserare och hydrocykloner bör inkluderas i framtida försök för att undersöka hur dessa påverkas av autogenkvarnens faktorer och under vilka förhållanden cirkulerande laster kan minimeras.

8 Referenser

Alatalo, J., & Pålsson, B.I. (2011). Influence of pebble mill operating conditions on measurements with an in-mill sensor. *Minerals & Metallurgical Processing, 28(4)*, 193-197. https://link.springer.com/article/10.1007/BF03402451

Ebadnejad, A., Karimi, G.R., & Dehghani, H. (2013). Application of response surface methodology for modeling of ball mills in copper sulphide ore grinding. *Powder Technology, 245, 292-296*. https://www.sciencedirect.com/science/articl

Gujarati, D., Porter, D. (2009). *Basic Econometrics (uppl. 5)*. McGraw-Hill Irwin.

Hahne, R., Pålsson, B.I., & Samskog, P.O. (2003). Ore characterisation for–and simulation of–primary autogenous milling. *Minerals Engineering, 16(1)*, 13-19. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0892687502003114

Johnson, R., & Wichern, D. (2013). *Applied multivariate statistical analysis* (6 uppl.). Pearson Education Limited.

LKAB. (u.å.a). *Vad vi gör*. Hämtad 2025-01-22 från https://lkab.com/vad-vi-gor/

LKAB. (u.å.b). *Från gruva till hamn*. Hämtad 2025-01-22 från https://lkab.com/vad-vi-gor/fran-gruva-till-hamn/

Minitab. (2025). *Minitab Statistical Software*. https://www.minitab.com/en-us/products/minitab/
Montgomery, D. (2017). *Design and analysis of experiments* (9 uppl.). John Wiley & Sons, Inc.

Mishra, P., Pandey, C., Singh, U., Gupta, A., Sahu, C., Keshri, A. (2019). Descriptive Statistics and Normality Tests for Statistical Data. *Annals of Cardiac Anaesthesia, 22(1), 67-72*.
https://journals.lww.com/aoca/fulltext/2019/22010/descriptive_statistics_and_normality_tests_for.11.aspx

R Core Team. (2024). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. https://www.r-project.org/.

Skoglind, J., & Jokinen, K. (2005). *Förbättrad avfallsprovning* [Kandidatuppsats, Luleå tekniska universitetet]. DiVa portal. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1021129/FULLTEXT01.pdf

Taeger, D., Kuhnt, S. (2014). *Statistical Hypothesis Testing with SAS and R*. John Wiley & Sons, Ltd.

Telford, J.K. (2007). A Brief Introduction to Design of Experiments. *Johns Hopkins APL Technical Digest, 27(3)*, 224-232. https://secwww.jhuapl.edu/techdigest/Content/techdigest/pdf/V27-N03/27-03-Telford.pdf

Bilaga A: Designmatris

Designmatrisen som användes i denna försöksplan redovisas med kodade nivåer i tabell A1.

Tabell A1: Tabellen visar designmatrisen för experimentet med kodade nivåer.

Experimentnummer	Varvtal	Malstenskvot	Ingående tonnage
1	-1.00000	-1.00000	-1.00000
2	1.00000	-1.00000	-1.00000
3	-1.00000	1.00000	-1.00000
4	1.00000	1.00000	-1.00000
5	-1.00000	-1.00000	1.00000
6	1.00000	-1.00000	1.00000
7	-1.00000	1.00000	1.00000
8	1.00000	1.00000	1.00000
9	-1.68179	0.00000	0.00000
10	1.68179	0.00000	0.00000
11	0.00000	-1.68179	0.00000
12	0.00000	1.68179	0.00000
13	0.00000	0.00000	-1.68179
14	0.00000	0.00000	1.68179
15	0.00000	0.00000	0.00000
16	0.00000	0.00000	0.00000
17	0.00000	0.00000	0.00000
18	0.00000	0.00000	0.00000

Bilaga B: Körordning

Tabell B1 visar den randomiserade körordningen för utförandet av försöksplanen.

Tabell B1: Tabellen visar den randomiserade körordningen för experimentet.

Körordning	Experimentnummer
1	6
2	10
3	15
4	2
5	13
6	9
7	18
8	11
9	8
10	3
11	12
12	1
13	5
14	17
15	7
16	16
17	14
18	4

Bilaga C: Tidsintervall för mätpunkter

Tabell C1: Tabellen visar körordning, experimentnummer, datum samt tidsintervall för provtagning. Om steady state uppnåtts under en annan period anges detta i parentes.

Körordning (observation)	Experimentnummer	Datum	Tidsintervall
1	6	2025-02-17	09:00 - 09:30
2	10	2025-02-17	12:40 - 13:15
3	15	2025-02-17	14:45 - 15:15
4	2	2025-02-17	17:35 - 18:05
5	13	2025-02-18	11:50 - 12:20
6	9	2025-02-18	18:42 - 19:06 (15:45 - 16:15)
7	18	2025-02-19	07:08 - 07:35
8	11	2025-02-20	08:01 - 08:28
9	8	2025-02-20	12:05 - 12:30
10	3	2025-02-20	14:20 - 14:45
11	12	2025-02-20	17:11 - 17:45
12	1	2025-02-21	10:51 - 11:19
13	5	2025-02-21	13:30 - 13:55
14	17	2025-02-21	16:00 - 16:21
15	7	2025-02-22	08:48 - 09:15
16	16	2025-02-22	13:33 - 13:57
17	14	2025-02-22	17:17 - 17:41
18	4	2025-02-24	12:26 - 12:51
19	19	2025-02-25	11:50 - 12:15 (13:00 - 13:23)

Bilaga D: Mätdata

I tabell D1 visas körordning, experimentnummer, faktornivåerna i kodade nivåer, samt standardiserat data för alla responsvariabler.

Tabell D1: Tabellen visar standardiserat mätdata för försöksplanen.

Körordning	Experimentnummer	Ingående tonnage	Varvtal	Malstenskvot	Effekt	Lagertryck	PSI	Pebblesproduktion	KWh/Ton	P45
1	6	1	-1	1	1.923	2.026	1.149	-1.238	1.651	-1.606
2	10	1.682	0	0	0.649	0.432	-0.810	-0.205	-0.191	-0.331
3	15	0	0	0	0.207	0.092	1.456	0.311	0.316	-0.629
4	2	1	-1	-1	0.650	0.717	1.032	-0.172	0.415	-0.992
5	13	0	0	-1.682	-1.434	-0.951	-0.274	1.668	-1.473	0.870
6	9	-1.682	0	0	-0.860	-0.788	0.311	-0.355	-0.544	1.726
7	18	0	0	0	-0.128	-0.071	-0.878	-1.002	-0.283	0.127
8	11	0	-1.682	0	1.966	2.452	1.879	-0.920	2.130	-2.066
9	8	1	1	1	-0.202	-0.577	-1.524	0.611	-0.436	0.342
10	3	-1	1	-1	-1.051	-1.157	0.142	1.060	-0.787	0.932
11	12	0	1.682	0	-1.081	-1.170	-1.267	0.823	-1.153	1.384
12	1	-1	-1	-1	-0.538	-0.127	0-275	-1.092	-0.473	-0.0136
13	5	-1	-1	1	0.223	0.172	0.195	-1.924	0.309	-0.588
14	17	0	0	0	-0.593	-0.450	-0.606	-0.170	-0.707	0.191
15	7	-1	1	1	-0.298	-0.611	0.342	0.343	0.050	0.301
16	16	0	0	0	0.637	0.375	-0.082	-0.00439	0.776	-0.424
17	14	0	0	1.682	1.412	0.950	0.397	-0.491	1.598	-0.923
18	4	1	1	-1	-1.014	-0.853	-1.808	1.765	-1.221	1.103
19	19	0	0	0	-0.467	-0.462	0.621	0.984	-0.387	0.566

Bilaga E: Kompletterande resultat för *Effekt*

ANOVA Fullständig Modell

Tabell E1: Analys av Varians för responsvariabeln Effekt, för den fullständiga modellen.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	16.0424	1.78249	8.19	0.002
Linear	3	14.6555	4.88516	22.46	0.000
Ingående_ton	1	2.2604	2.26042	10.39	0.010
Varvtal	1	7.2468	7.24676	33.32	0.000
Malstenskvot	1	5.1483	5.14830	23.67	0.001
Square	3	0.3700	0.12332	0.57	0.650
Ingående_ton^2	1	0.0296	0.02959	0.14	0.721
Varvtal^2	1	0.2955	0.29549	1.36	0.274
Malstenskvot^2	1	0.0024	0.00236	0.01	0.919
2-Way Interaction	3	1.0169	0.33898	1.56	0.266
Ingående_ton*Varvtal	1	0.9486	0.94860	4.36	0.066
Ingående_ton*Malstenskvot	1	0.0408	0.04075	0.19	0.675
Varvtal*Malstenskvot	1	0.0276	0.02758	0.13	0.730
Error	9	1.9576	0.21751		
Lack-of-Fit	5	0.9468	0.18937	0.75	0.627
Pure Error	4	1.0108	0.25269		
Total	18	18.0000			

Tabell E1 visar ANOVA-resultaten för responsvariabeln *Effekt*. Vid en signifikansnivå på $\alpha = 0.05$ är huvudeffekterna för *Ingående tonnage*, *Varvtal* och *Malstenskvot* signifikanta. Inga kvadratiska effekter eller interaktioner mellan faktorerna är signifikanta, även om interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* är nära att nå signifikansnivån.

Bilaga F: Kompletterande resultat för *Lagertryck*

ANOVA Fullständiga Modell

Tabell F1: Analys av varians för responsvariabeln Lagertryck, för den fullständiga modellen.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	16.5378	1.8375	11.31	0.001
Linear	3	14.8931	4.9644	30.56	0.000
Ingående tonnage	1	1.8953	1.8953	11.67	0.008
Varvtal	1	10.6797	10.6797	65.73	0.000
Malstenskvot	1	2.3180	2.3180	14.27	0.004
Square	3	0.8032	0.2677	1.65	0.247
Ingående tonnage^2	1	0.0736	0.0736	0.45	0.518
Varvtal^2	1	0.6368	0.6368	3.92	0.079
Malstenskvot^2	1	0.0016	0.0016	0.01	0.923
2-Way Interaction	3	0.8415	0.2805	1.73	0.231
Ingående tonnage*Varvtal	1	0.6963	0.6963	4.29	0.068
Ingående tonnage*Malstenskvot	1	0.0684	0.0684	0.42	0.533
Varvtal*Malstenskvot	1	0.0768	0.0768	0.47	0.509
Error	9	1.4622	0.1625		
Lack-of-Fit	5	0.9460	0.1892	1.47	0.366
Pure Error	4	0.5163	0.1291		
Total	18	18.0000			

Tabell F1 visar variansanalysen för responsvariabeln *Lagertryck* i den fullständiga modellen där samtliga termer har inkluderats. Resultatet visar att de tre huvudeffekterna *Ingående tonnage*, *Varvtal* och *Malstenskvot* är statistiskt signifikanta. Varken de kvadratiska termerna eller interaktionstermerna uppnår signifikans, men den kvadratiska termen för *Varvtal* samt interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* ligger nära den valda signifikansnivån på $\alpha = 0.05$.

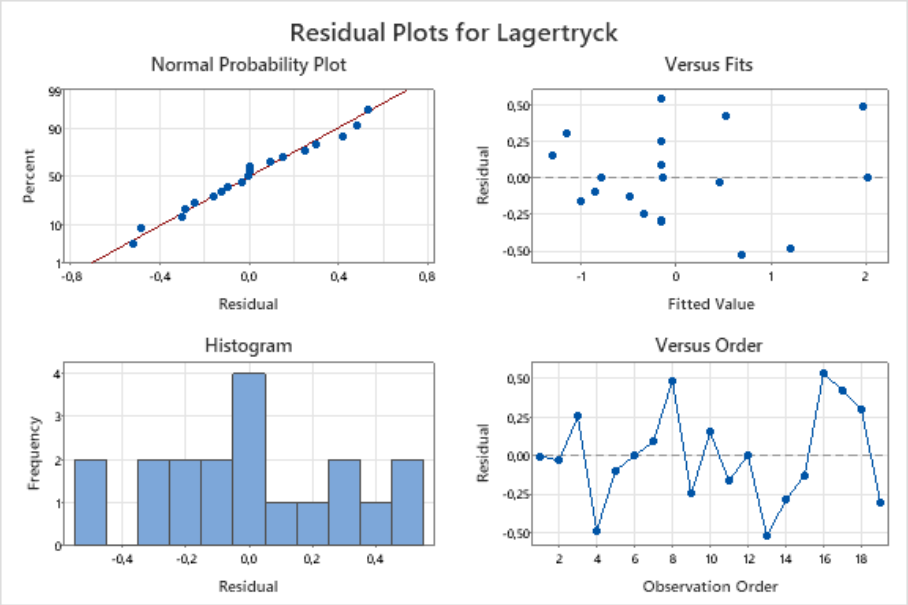
ANOVA Reducerad Modell

Tabell F2: Analys av varians för *Lagertryck* för den reducerade modellen.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	5	16.3189	3.2638	25.24	0.000
Linear	3	14.8931	4.9644	38.39	0.000
Ingående ton	1	1.8953	1.8953	14.66	0.002
Varvtal	1	10.6797	10.6797	82.59	0.000
Malstenskvot	1	2.3180	2.3180	17.93	0.001
Square	1	0.7296	0.7296	5.64	0.034
Varvtal^2	1	0.7296	0.7296	5.64	0.034
2-Way Interaction	1	0.6963	0.6963	5.38	0.037
Ingående ton*Varvtal	1	0.6963	0.6963	5.38	0.037
Error	13	1.6811	0.1293		
Lack-of-Fit	9	1.1648	0.1294	1.00	0.543
Pure Error	4	0.5163	0.1291		
Total	18	18.0000			

Tabell F2 presenterar resultatet från variansanalysen för responsvariabeln *Lagertryck* i den reducerade modellen. Modellen innehåller enbart signifikanta termer, där samtliga huvudeffekter är statistiskt signifikanta. Även den kvadratiska termen för *Varvtal* samt interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* visar en signifikant påverkan på responsvariabeln.

Modellvalidering



Figur F1: Residualdiagram för *Lagertryck* för den reducerade modellen.

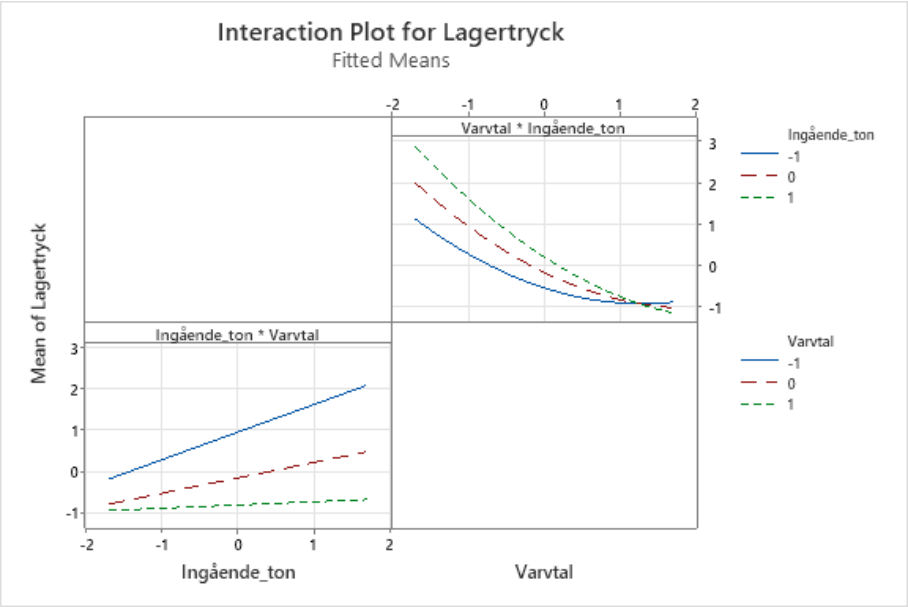
Figur F1 presenterar residualdiagrammen för den reducerade modellen för responsvariabeln *Lagertryck*. Normalfördelningsplottet visar att residualerna i stort följer en rak linje, vilket stödjer antagandet om normalfördelning. Diagrammet med residualer mot de anpassade värdena uppvisar ingen tydlig systematik, utan visar en slumpmässig spridning kring nollinjen. Histogrammet är ganska platt med en tydlig topp i mitten, vilket antyder viss avvikelse från normalfördelning. Diagrammet över residualer mot körordning uppvisar inga uppenbara mönster, vilket indikerar att det inte finns någon tidsmässig påverkan i residualerna.

Tabell F3: Passnings- och diagnostikvärden för ovanliga observationer för *Lagertryck*.

Obs	Lagertryck	Fit	Resid	Std Resid
8	2.452	1.966	0.486	2.07 R

Tabell F3 visar passnings- och diagnostikvärden för observation 8. Den aktuella observationen motsvarar körningen med Ingående tonnage $= 0$, Varvtal $= -1.682$ och Malstenskvot $= 0$, och uppvisar en stor residual, vilket indikerar att observationen kan vara en uteliggare i modellen..

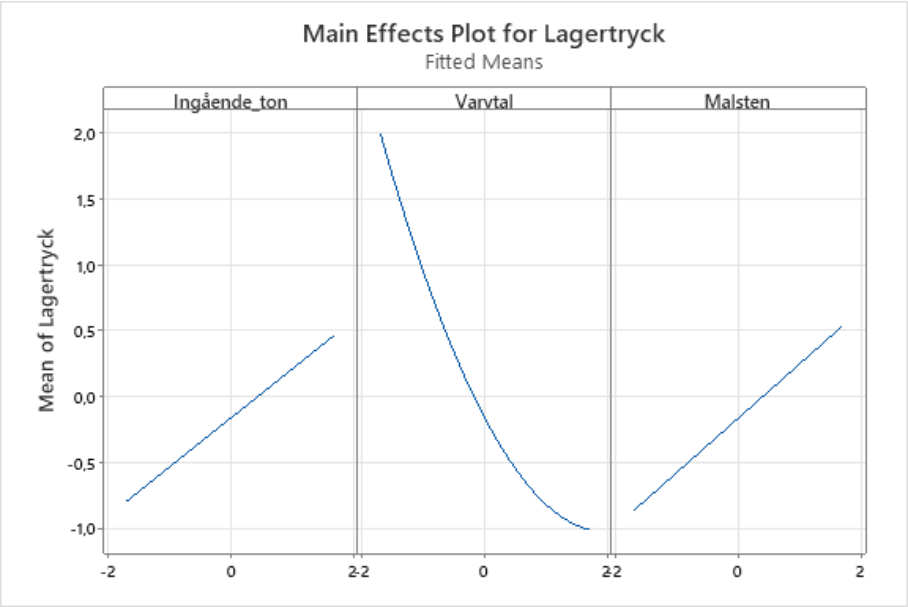
Interaktionseffekter



Figur F2: Visualisering av interaktionseffekterna på *Lagertryck*.

Figur F2 visar interaktionen mellan faktorerna *Ingående tonnage* och *Varvtal* och deras påverkan på responsvariabeln *Lagertryck*. Den övre högra delen av figuren visar hur *Lagertryck* ändras när *Ingående tonnage* hålls konstant vid tre olika nivåer, medan *Varvtal* varierar. I den nedre vänstra delen av figuren visas hur *Lagertryck* förändras när *Varvtal* hålls konstant vid tre nivåer, och *Ingående tonnage* ändras.

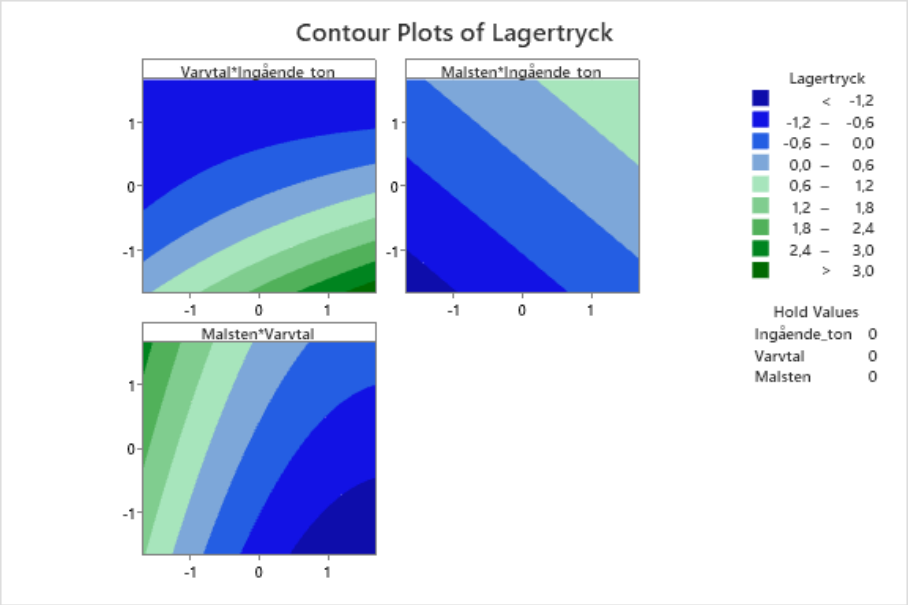
Huvudeffekter



Figur F3: Visualisering av huvudeffekterna på responsvariabeln *Lagertryck*.

Figur F3 visar huvudeffekterna för de ingående faktorerna. Eftersom *Ingående tonnage* och *Varvtal* har en signifikant interaktion bör deras effekter inte tolkas isolerat. *Malstenskvot* kan däremot tolkas separat då den inte samverkar med andra faktorer i modellen.

Konturplottar



Figur F4: Konturplottar för responsvariabeln *Lagertryck*.

Figur F4 visar konturplottarna för *Lagertryck* i förhållande till faktorerna. Notera att det enbart finns en signifikant interaktion mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*.

Bilaga G: Kompletterande resultat för *PSI*

ANOVA Fullständiga Modell

Tabell G1: Analys av Varians för responsvariabeln *PSI*, för den fullständiga modellen.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	13.914	1.5460	3.40	0.041
Linear	3	8.899	2.9662	6.53	0.012
Ingående tonnage	1	0.867	0.867	1.91	0.200
Varvtal	1	7.678	7.678	16.91	0.003
Malstenskvot	1	0.354	0.354	0.78	0.400
Square	3	0.389	0.1297	0.29	0.835
Ingående tonnage^2	1	0.315	0.315	0.69	0.426
Varvtal^2	1	0.027	0.027	0.06	0.813
Malstenskvot^2	1	0.024	0.024	0.05	0.823
2-Way Interaction	3	4.626	1.5421	3.40	0.067
Ingående tonnage*Varvtal	1	4.616	4.616	10.17	0.011
Ingående tonnage*Malstenskvot	1	0.009	0.009	0.02	0.891
Varvtal*Malstenskvot	1	0.001	0.001	0.00	0.957
Error	9	4.086	0.4541		
Lack-of-Fit	5	0.487	0.0974	0.11	0.984
Pure Error	4	3.599	0.8999		
Total	18	18.000			

Tabell G1 visar ANOVA-resultaten för den fullständiga modellen för responsvariabeln *PSI*. Analysen visar att huvudeffekten av *Varvtal* är signifikant, liksom interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*. Övriga termer är inte signifikanta på 5%-nivån.

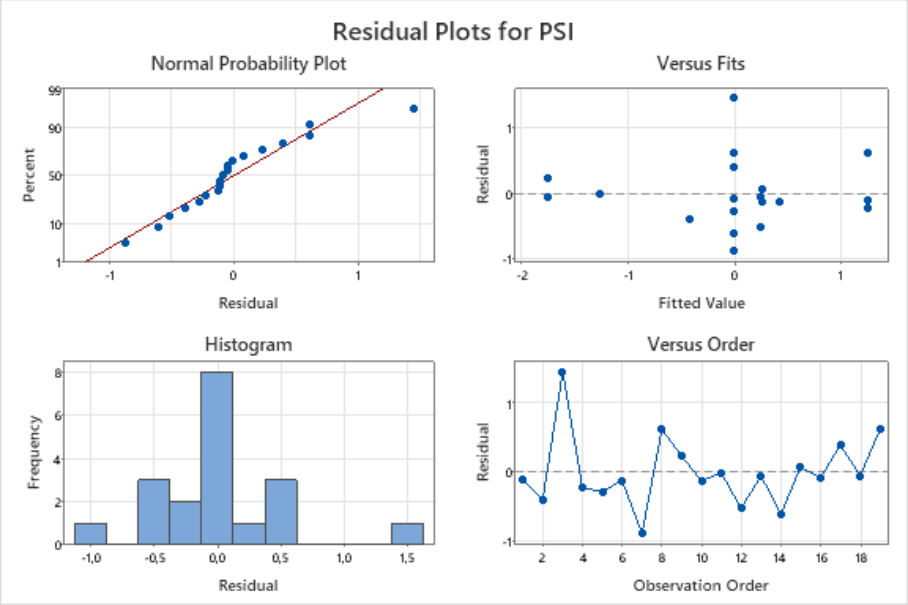
ANOVA Reducerad Modell

Tabell G2: Analys av Varians för responsvariabeln *PSI*, för den reducerade modellen.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	3	13.1601	4.3867	13.60	0.000
Linear	2	8.5443	4.2721	13.24	0.000
Ingående_ton	1	0.8668	0.8668	2.69	0.122
Varvtal	1	7.6775	7.6775	23.79	0.000
2-Way Interaction	1	4.6158	4.6158	14.31	0.002
Ingående_ton*Varvtal	1	4.6158	4.6158	14.31	0.002
Error	15	4.8399	0.3227		
Lack-of-Fit	11	1.2405	0.1128	0.13	0.997
Pure Error	4	3.5994	0.8999		
Total	18	18.0000			

I tabell G2 redovisas ANOVA-tabellen för den reducerade modellen för *PSI*. Huvudeffekten för *Varvtal* samt interaktionen med *Ingående tonnage* är signifikanta på $\alpha = 0.05$-nivån.

Modellvalidering



Figur G1: Residualdiagram för *PSI*.

I normalfördelningsdiagrammet, figur G1, antyder den lätt S-formade strukturen att residualerna avviker något från en normalfördelning. Det går även att urskilja en enskild observation med en relativt stor residual. I diagrammet som visar residualerna mot de anpassade värdena är residualerna slumpmässigt fördelade på båda sidor om den sträckade linjen. Histogrammet över residualerna är centrerat kring noll, men uppvisar en särskilt hög stapel vid just noll. Även här framträder en stor residual, vilket kan indikera förekomsten av en uteliggare. I det sista diagrammet, där residualerna plottas mot körordning, syns ingen tydlig struktur. Däremot har observation 3 en markant stor residual.

Tabell G3: Shapiro Wilk test för residualer för *PSI*.

W	**p-värde**
0.91982	0.1123

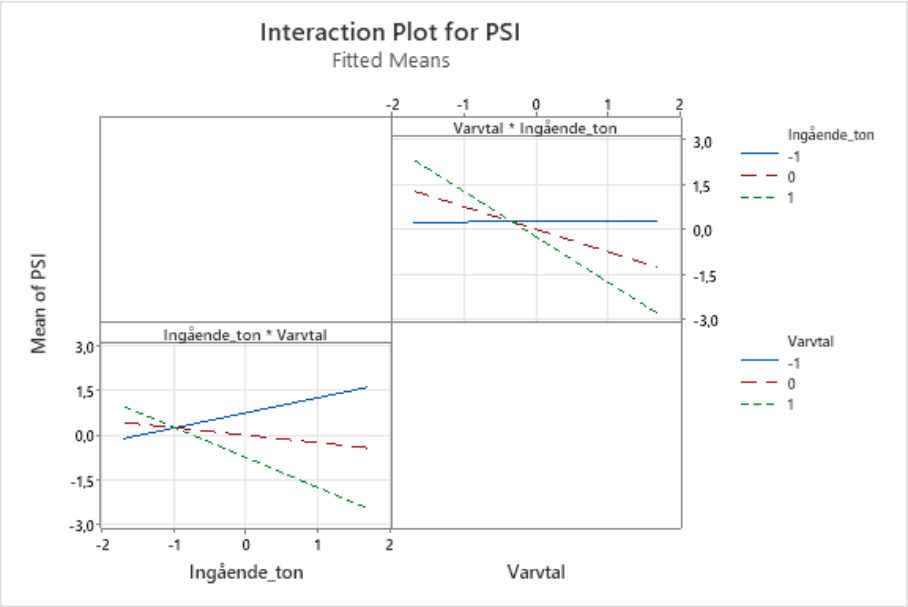
I tabell G3 visas normalfördelningstestet för residualerna för *PSI*. Eftersom p-värde > 0.05 indikerar detta att residualernas fördelning inte skiljer sig signifikant från normalfördelningen.

Tabell G4: Passnings- och diagnostikvärden för ovanliga observationer för *PSI*.

Obs	**PSI**	**Fit**	**Resid**	**Std Resid**
3	1.456	0.000	1.456	2.63 R

Tabell G4 visar passnings- och diagnostikvärden för observation 3. En stor residual kan indikera en ovanlig observation som avviker från den förväntade modellen. Den aktuella observationen motsvarar körningen med Ingående tonnage $= 0$, Varvtal $= 0$ och Malstenskvot $= 0$.

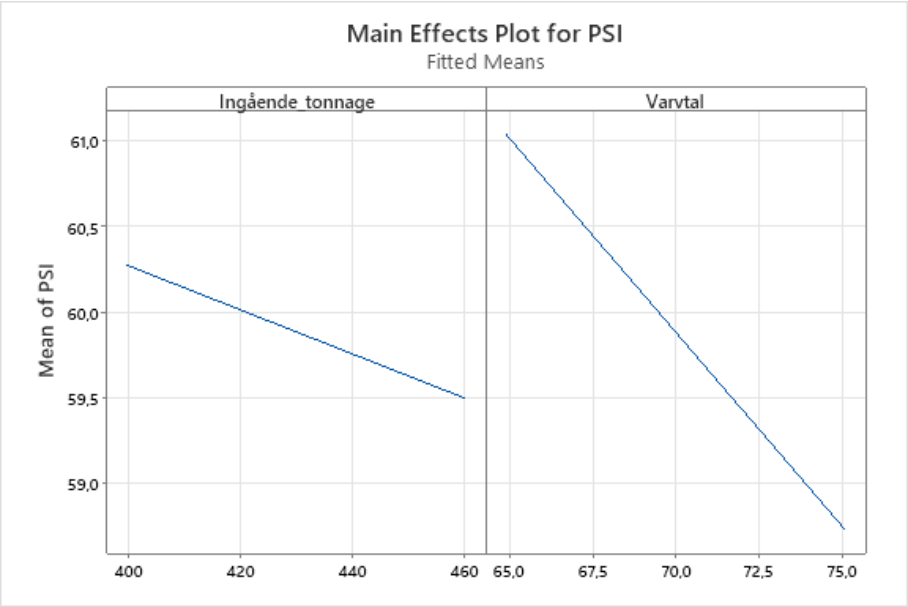
Interaktionseffekter



Figur G2: Interaktionseffekterna på responsvariabeln *PSI* mellan faktorerna *Ingående tonnage* och *Varvtal*.

I figur G2 visas hur de två faktorerna *Ingående tonnage* och *Varvtal* interagerar och påverkar responsvariabeln *PSI*. Den övre högra delen av figuren visar hur *PSI* ändras när *Ingående tonnage* hålls konstant vid tre olika nivåer, medan *Varvtal* varierar. I den nedre vänstra delen av figuren illustreras hur *PSI* förändras när *Varvtal* hålls konstant vid tre nivåer, och *Ingående tonnage* varierar.

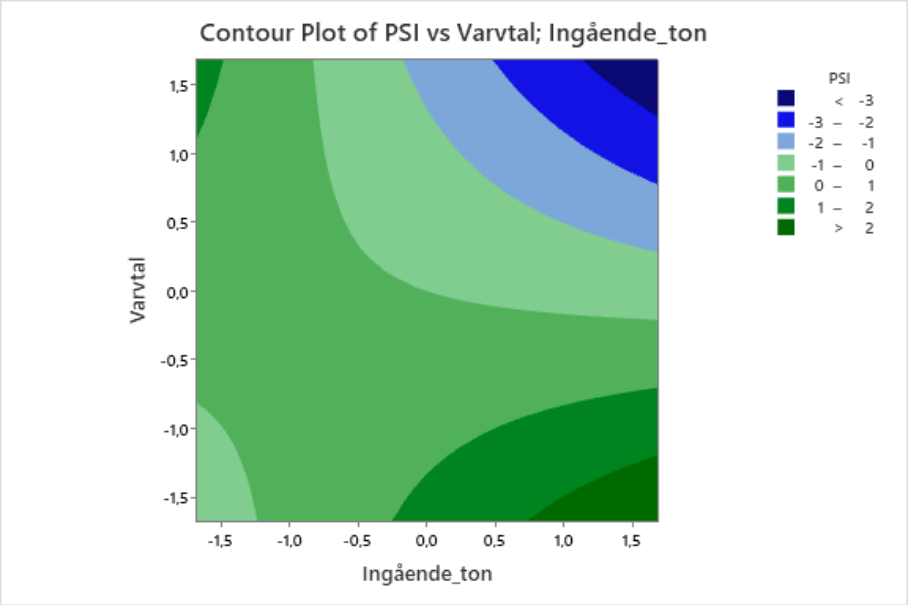
Huvudeffekter



Figur G3: Visualisering av huvudeffekterna på responsvariabeln *PSI*.

Figur G3 visar huvudeffekterna av faktorerna *Ingående tonnage* och *Varvtal* på responsvariabeln *PSI*. Eftersom det finns en signifikant interaktion mellan dessa två faktorer bör huvudeffekterna inte tolkas isolerat. För att få en fullständig förståelse av deras påverkan på *PSI* måste effekterna av varje faktor beaktas i hänsyn till den andra.

Konturplottar



Figur G4: Konturplot för responsvariabeln *PSI* mellan faktorerna *Ingående tonnage* och *Varvtal*.

I figur G4 visas en konturplott för responsvariabeln *PSI* i relation till faktorerna *Ingående tonnage* och *Varvtal*. Eftersom interaktionen mellan dessa två faktorer är signifikant, har konturlinjerna en icke-linjär struktur.

Bilaga H: Kompletterande resultat för *P45*

ANOVA Fullständiga Modell

Tabell H1: Analys av Varians för responsvariabeln *P45*, för den fullständiga modellen.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	16.0243	1.7805	8.11	0.002
Linear	3	14.2476	4.7492	21.63	0.000
Ingående_ton	1	2.0388	2.0388	9.29	0.014
Varvtal	1	9.9402	9.9402	45.28	0.000
Malstenskvot	1	2.2686	2.2686	10.33	0.011
Square	3	1.1388	0.3796	1.73	0.230
Ingående_ton^2	1	0.6611	0.6611	3.01	0.117
Varvtal^2	1	0.2949	0.2949	1.34	0.276
Malstenskvot^2	1	0.0176	0.0176	0.08	0.783
2-Way Interaction	3	0.6379	0.2126	0.97	0.449
Ingående_ton*Varvtal	1	0.6261	0.6261	2.85	0.126
Ingående_ton*Malstenskvot	1	0.0050	0.0050	0.02	0.883
Varvtal*Malstenskvot	1	0.0068	0.0068	0.03	0.864
Error	9	1.9757	0.2195		
Lack-of-Fit	5	1.0336	0.2067	0.88	0.566
Pure Error	4	0.9421	0.2355		
Total	18	18.0000			

I tabell H1 presenteras ANOVA-tabellen för den fullständiga modellen för responsvariabeln *P45*. Alla huvudeffekter är signifikanta, medan inga kvadratiska termer eller interaktioner är signifikanta.

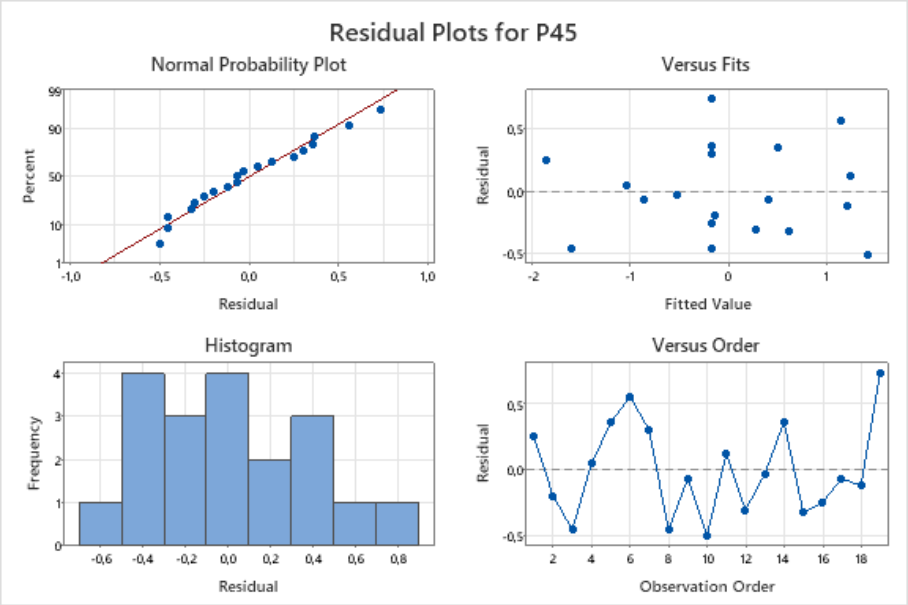
ANOVA Reducerad Modell

Tabell H2: Analys av Varians för responsvariabeln *P45*, för en reducerad modell.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	5	15.7148	3.1430	17.88	0.000
Linear	3	14.2476	4.7492	27.02	0.000
Ingående_ton	1	2.0388	2.0388	11.60	0.005
Varvtal	1	9.9402	9.9402	56.55	0.000
Malstenskvot	1	2.2686	2.2686	12.91	0.003
Square	1	0.8411	0.8411	4.78	0.048
Ingående_ton*Ingående_ton	1	0.8411	0.8411	4.78	0.048
2-Way Interaction	1	0.6261	0.6261	3.56	0.082
Ingående_ton*Varvtal	1	0.6261	0.6261	3.56	0.082
Error	13	2.2852	0.1758		
Lack-of-Fit	9	1.3431	0.1492	0.63	0.739
Pure Error	4	0.9421	0.2355		
Total	18	18.0000			

I tabell H2 visas ANOVA-tabellen för den reducerade modellen för *P45*. Alla huvudeffekter samt den kvadratiska termen för *Ingående tonnage* är signifikanta. Interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* är inte signifikant på $\alpha = 0.05$-nivån, men har inkluderats i modellen.

Modellvalidering



Figur H1: Residualdiagram för *P45*.

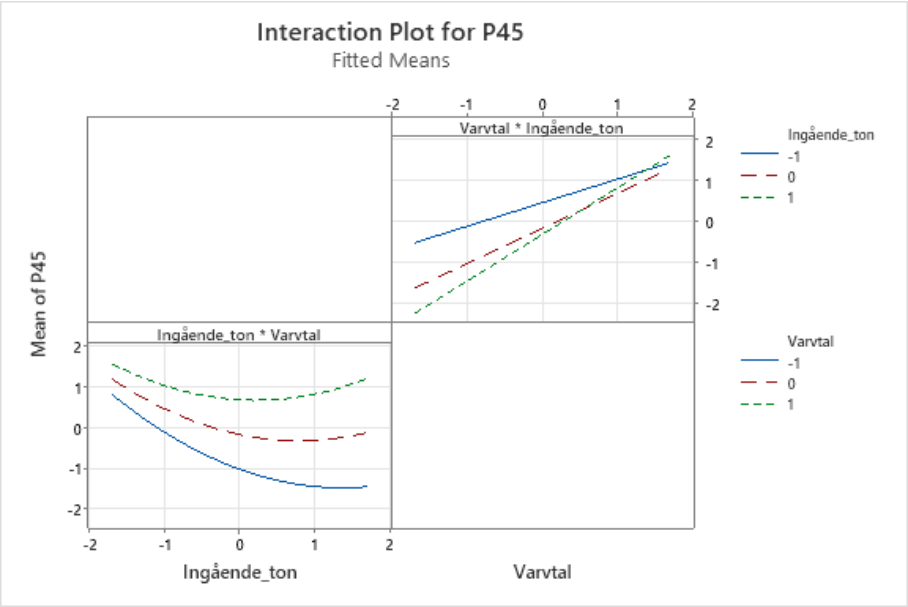
Normalfördelningsdiagrammet, vilket visas i figur H1, visar att residualerna ungefärligen följer en rak linje. Residualerna plottade mot de anpassade värdena visar inga tecken på ökande varians. Histogrammet av residualer uppvisar en ungefärlig symmetrisk spridning runt noll. Residualer plottade mot körordning visar inget samband, vilket tyder på att residualerna inte är korrelerade.

Tabell H3: Passnings- och diagnostikvärden för ovanliga observationer för *P45*.

Obs	P45	Fit	Resid	Std Resid
6	1.726	1.164	0.563	2.06 R

Tabell H3 visar passnings- och diagnostikvärden för observation 6. Den aktuella observationen motsvarar körningen med Ingående tonnage $= -1.682$, Varvtal $= 0$ och Malstenskvot $= 0$.

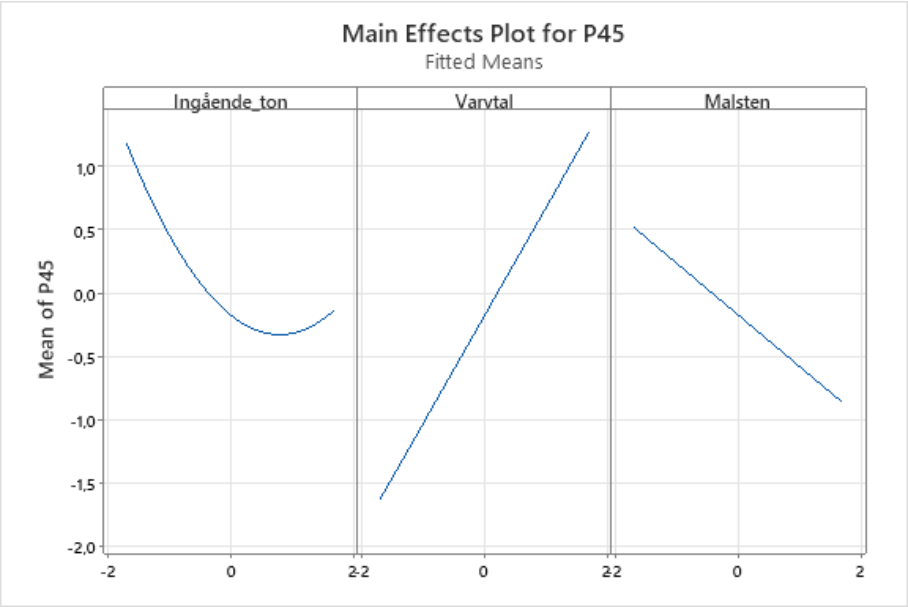
Interaktionseffekter



Figur H2: Interaktionseffekterna på responsvariabeln *P45* mellan faktorerna *Ingående tonnage* och *Varvtal*.

Figur H2 visar interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* och deras effekt på responsvariabeln *P45*. Den övre högra delen av figuren visar hur *P45* förändras när *Ingående tonnage* hålls konstant vid tre nivåer, medan *Varvtal* varierar. Den nedre vänstra delen av figuren visualiserar hur *P45* ändras när *Varvtal* hålls konstant vid tre nivåer, och *Ingående tonnage* varierar.

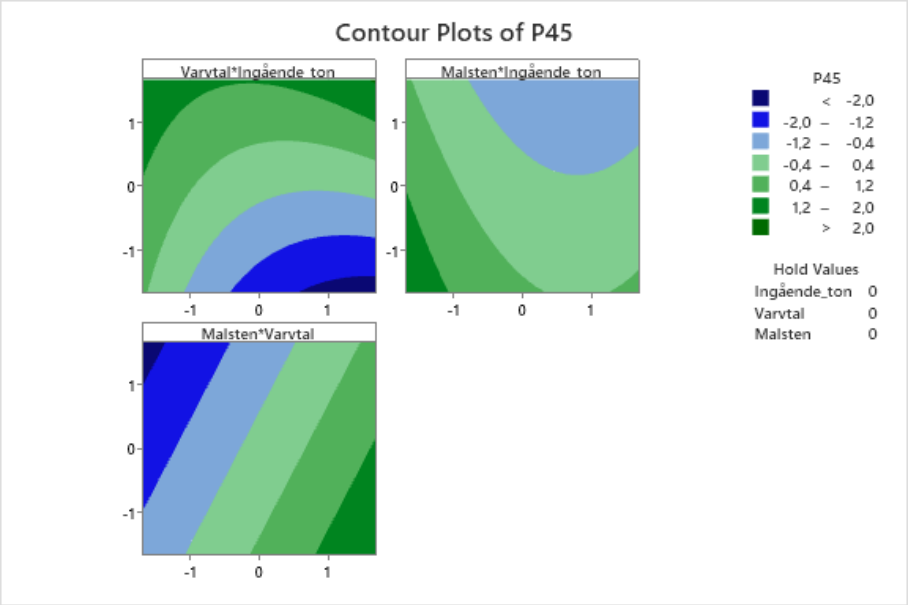
Huvudeffekter



Figur H3: Visualisering av huvudeffekterna på responsvariabeln *P45*.

I figur H3 visas huvudeffekterna av faktorerna på responsvariabeln *P45*. Eftersom *Malstenskvot* inte har någon signifikant interaktion med andra faktorer kan denna faktor tolkas isolerat. För de andra faktorerna bör däremot interaktionseffekten beaktas, och deras huvudeffekter kan inte tolkas utan hänsyn till den signifikanta interaktionen.

Konturplottar



Figur H4: Konturplottar för responsvariabeln *P45*.

I figur (H4) visas konturplott för responsvariabeln *P45* i relation till alla tre faktorer. Notera att modellen inkluderar en signfikant interaktion mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*.

Bilaga I: Kompletterande resultat för *Pebblesproduktion*

ANOVA Fullständig Modell

Tabell I1: Analys av varians för responsvariabeln *Pebblesproduktion* för den fullständiga modellen.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	14.6019	1.62244	4.30	0.020
Linear	3	13.6787	4.55955	12.08	0.002
Ingående_ton	1	0.5869	0.58686	1.55	0.244
Varvtal	1	9.0799	9.07985	24.05	0.001
Malstenskvot	1	4.0119	4.01194	10.63	0.010
Square	3	0.8167	0.27224	0.72	0.564
Ingående_ton^2	1	0.2854	0.28540	0.76	0.407
Varvtal^2	1	0.0535	0.05345	0.14	0.715
Malstenskvot^2	1	0.3609	0.36090	0.96	0.354
2-Way Interaction	3	0.1066	0.03552	0.09	0.961
Ingående_ton×Varvtal	1	0.0502	0.05018	0.13	0.724
Ingående_ton×Malstenskvot	1	0.0563	0.05629	0.15	0.708
Varvtal×Malstenskvot	1	0.0001	0.00008	0.00	0.988
Error	9	3.3981	0.37756		
Lack-of-Fit	5	1.3052	0.26103	0.50	0.768
Pure Error	4	2.0929	0.52323		
Total	18	18.0000			

ANOVA-tabellen för den fullständiga modellen av *Pebblesproduktion* visas i tabell I1. De signifikanta termerna inkluderar huvudeffekterna *Varvtal* och *Malstenskvot*.

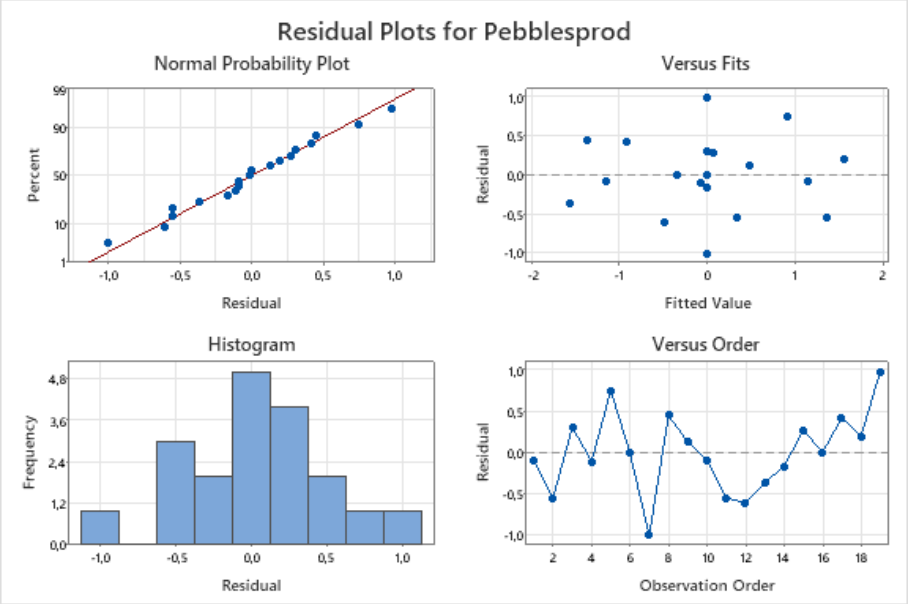
ANOVA Reducerad Modell

Tabell I2: Analys av Varians för reducerade modellen för *Pebblesproduktion*.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	3	13.6787	4.5596	15.83	0.000
Linear	3	13.6787	4.5596	15.83	0.000
Ingående_ton	1	0.5869	0.5869	2.04	0.174
Varvtal	1	9.0799	9.0799	31.52	0.000
Malstenskvot	1	4.0119	4.0119	13.93	0.002
Error	15	4.3213	0.2881		
Lack-of-Fit	11	2.2284	0.2026	0.39	0.904
Pure Error	4	2.0929	0.5232		
Total	18	18.0000			

I tabell I2 visas ANOVA-tabellen för den reducerade modellen av *Pebblesproduktion*. Även i denna modell är huvudeffekterna *Varvtal* och *Malstenskvot* signifikanta, däremot är *Ingående tonnage* inte signifikant.

Modellvalidering

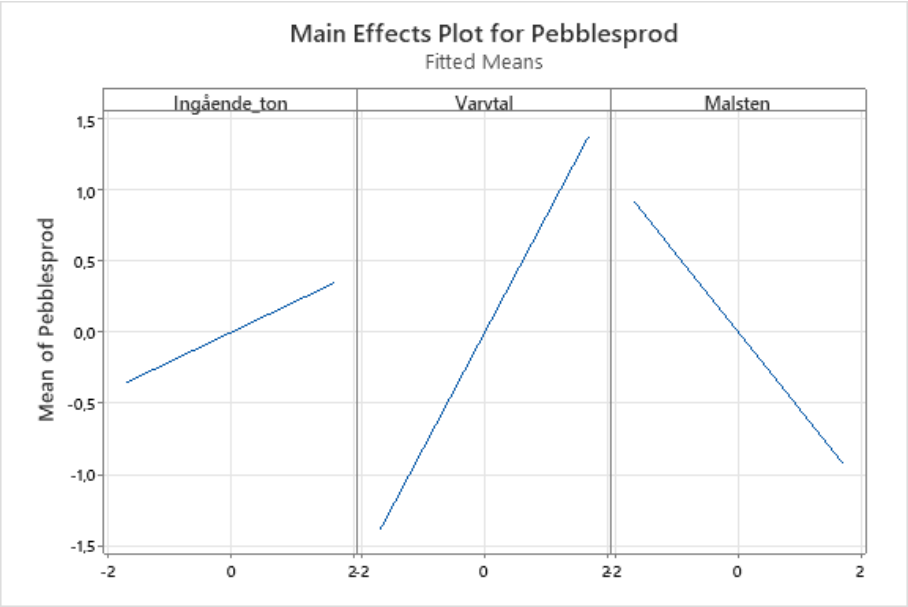


Figur I1: Residualdiagram för *Pebblesproduktion* för den reducerade modellen.

Figur I1 visar residualdiagrammen för responsvariabeln *Pebblesproduktion* i den reducerade modellen. Normalfördelningsplottet visar att residualerna i stort följer den räta linjen, vilket tyder på att antagandet om normalfördelning är rimligt uppfyllt. I diagrammet över residualer mot anpassade värden syns ingen tydlig struktur, vilket tyder på att variansen är konstant och modellen inte lider av heteroskedasticitet. Histogrammet visar en ungefär symmetrisk fördelning kring noll, vilket också stödjer antagandet om normalfördelning.

Däremot visar plotten med residualer mot körordning en viss trend, där residualerna först ökar systematiskt, därefter minskar, och sedan ökar igen. Detta kan tyda på att residualerna inte är helt oberoende, vilket i sin tur kan bero på en underliggande processpåverkan som inte fångas upp av modellen.

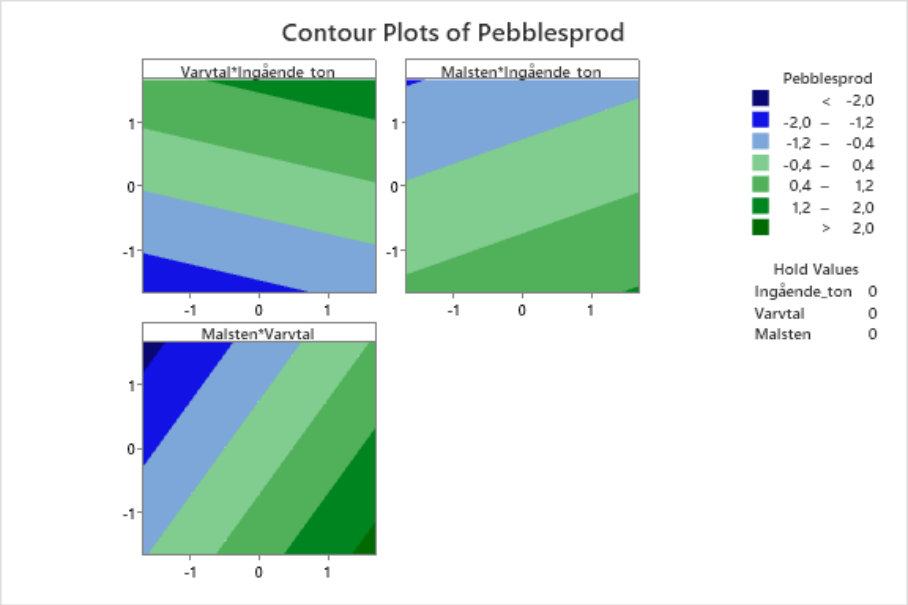
Huvudeffekter



Figur I2: Visualisering av huvudeffekterna på responsvariabeln *Pebblesproduktion*.

Figur I2 visar sambandet av faktorerna *Ingående tonnage*, *Varvtal* och *Malstenskvot* på responsvariabeln *Pebblesproduktion*.

Konturplottar



Figur I3: Konturplottar för responsvariabeln *Pebblesproduktion*.

I figur I3 visas konturplottarna för responsvariabeln *Pebblesproduktion*. Notera att inga interaktionseffekter är signifikanta, vilket innebär att plottarna endast används i illustrativt syfte.

Bilaga J: Kompletterande resultat för *kWh/Ton*

ANOVA Fullständiga Modell

Tabell J3: Analys av Varians för responsvariabeln *kWh/Ton*, för den fullständiga modellen.

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	15.0540	1.6727	5.11	0.012
Linear	3	13.2819	4.4273	13.53	0.001
Ingående tonnage	1	0.4749	0.4749	1.45	0.259
Varvtal	1	7.1282	7.1282	21.78	0.001
Malstenskvot	1	5.6788	5.6788	17.35	0.002
Square	3	0.4920	0.1640	0.50	0.691
Ingående tonnage^2	1	0.0998	0.0998	0.30	0.594
Varvtal^2	1	0.3272	0.3272	1.00	0.344
Malstenskvot^2	1	0.0000	0.0000	0.00	0.996
2-Way Interaction	3	1.2801	0.4267	1.30	0.332
Ingående tonnage*Varvtal	1	1.2404	1.2404	3.79	0.083
Ingående tonnage*Malstenskvot	1	0.0202	0.0202	0.06	0.810
Varvtal*Malstenskvot	1	0.0195	0.0195	0.06	0.813
Error	9	2.9460	0.3273		
Lack-of-Fit	5	1.5313	0.3063	0.87	0.571
Pure Error	4	1.4147	0.3537		
Total	18	18.0000			

Tabell J3 visar ANOVA-tabellen för den fullständiga modellen för responsvariabeln *kWh/Ton*. De signifikanta termerna inkluderar huvudeffekterna *Varvtal* och *Malstenskvot*. Interaktionen mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal* är väldigt nära signifikansnivån.

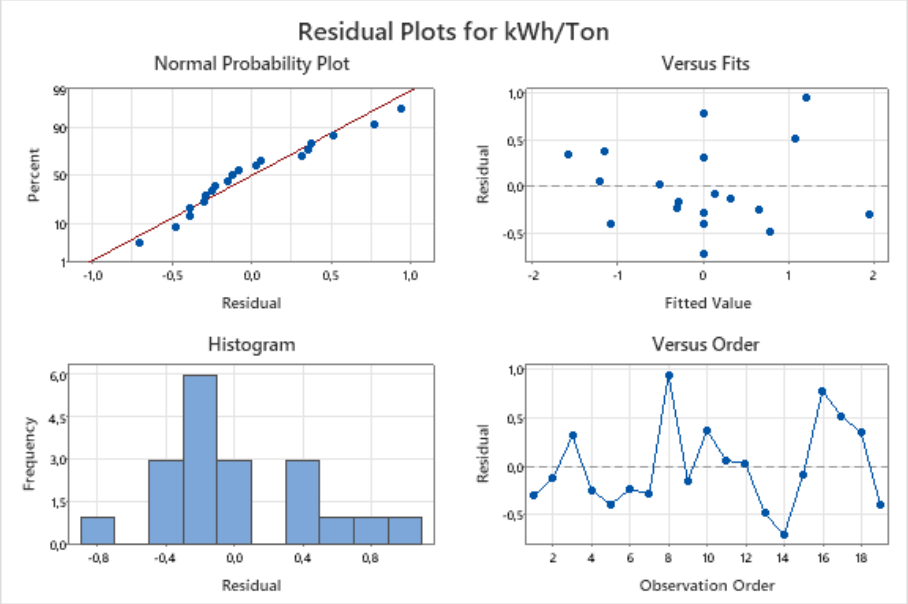
ANOVA Reducerad Modell

Tabell J4: Analys av varians (ANOVA) för responsvariabeln *kWh/Ton* i den reducerade modellen

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	4	14.5223	3.6306	14.62	0.000
Linear	3	13.2819	4.4273	17.82	0.000
Ingående tonnage	1	0.4749	0.4749	1.91	0.188
Varvtal	1	7.1282	7.1282	28.70	0.000
Malstenskvot	1	5.6788	5.6788	22.86	0.000
2-Way Interaction	1	1.2404	1.2404	4.99	0.042
Ingående tonnage*Varvtal	1	1.2404	1.2404	4.99	0.042
Error	14	3.4777	0.2484		
Lack-of-Fit	10	2.0629	0.2063	0.58	0.777
Pure Error	4	1.4147	0.3537		
Total	18	18.0000			

ANOVA-tabellen för den reducerade modellen för *kWh/Ton* visas i tabell J4. Samtliga termer utom *Ingående tonnage* är signifikanta. Denna huvudeffekt behölls dock på grund av dess interaktion med *Varvtal*.

Modellvalidering



Figur J4: Residualdiagram för den reducerade modellen av *kWh/Ton*.

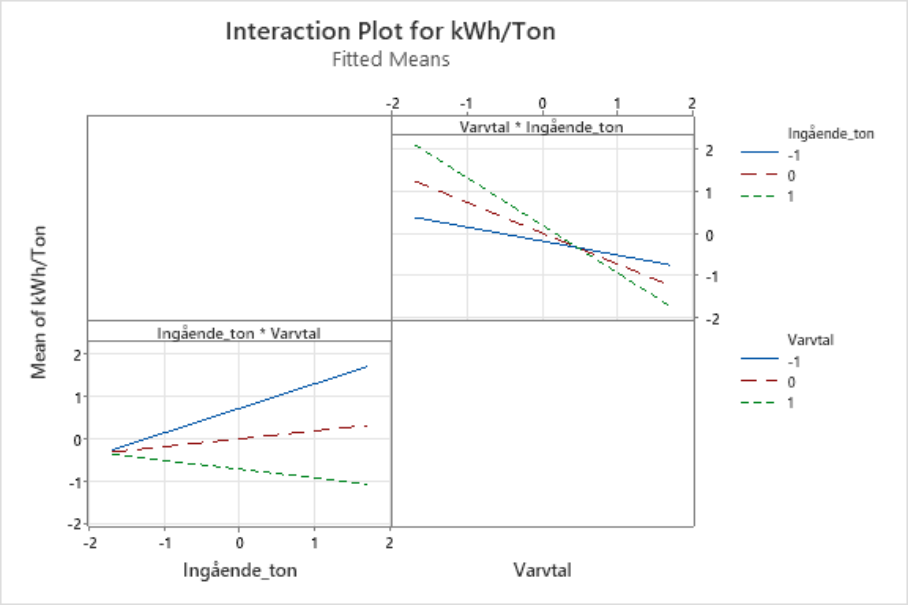
Figur J4 visar residualdiagrammen för den reducerade modellen av responsvariabeln *kWh/Ton*. I normalfördelningsdiagrammet följer punkterna till största del den raka linjen, vilket tyder på att residualerna är nära normalfördelade. I diagrammet som visar residualerna mot de anpassade värdena finns det vissa tendenser till ökande varians hos residualerna, vilket kan tyda på heteroskedasticitet. Men eftersom det är så få observationer är det svårt att avgöra. Histogrammet av residualer visar en någorlunda klockformad fördelning, men möjligtvis något vänsterskev. Residualerna mot körordning visar inga uppenbara mönster.

Tabell J5: Passnings- och diagnostikvärden för ovanliga observationer för responsvariabeln *kWh/Ton*.

Obs	KWh/Ton	Fit	Resid	Std Resid
8	2.159	1.215	0.944	2.20 R

I tabell J5 visas observation 8 som en potentiell uteliggare, då den har en standardiserad residual på 2.20. Denna observation motsvarar körningen med Ingående tonnage = 0, Varvtal = +1.682 och Malstenskvot = 0.

Interaktionseffekter

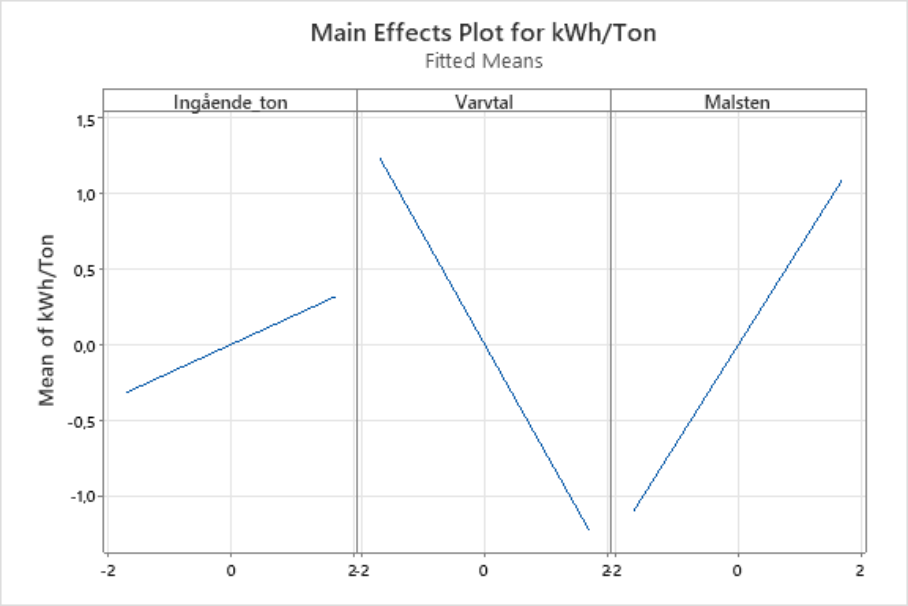


Figur J5: Visualisering av interaktionseffekterna på responsvariabeln *kWh/Ton*.

Interaktionseffekten mellan faktorerna *Ingående tonnage* och *Varvtal* på responsvariabeln *kWh/Ton* illustreras i figur J5. Den övre högra delen av figuren visar hur *kWh/Ton* ändras när *Ingående tonnage* hålls konstant vid tre nivåer, medan *Varvtal* varierar. I den nedre vänstra delen av figuren presenteras hur *kWh/Ton* föränd-

ras när *Varvtal* hålls konstant vid tre nivåer, och *Ingående tonnage* justeras.

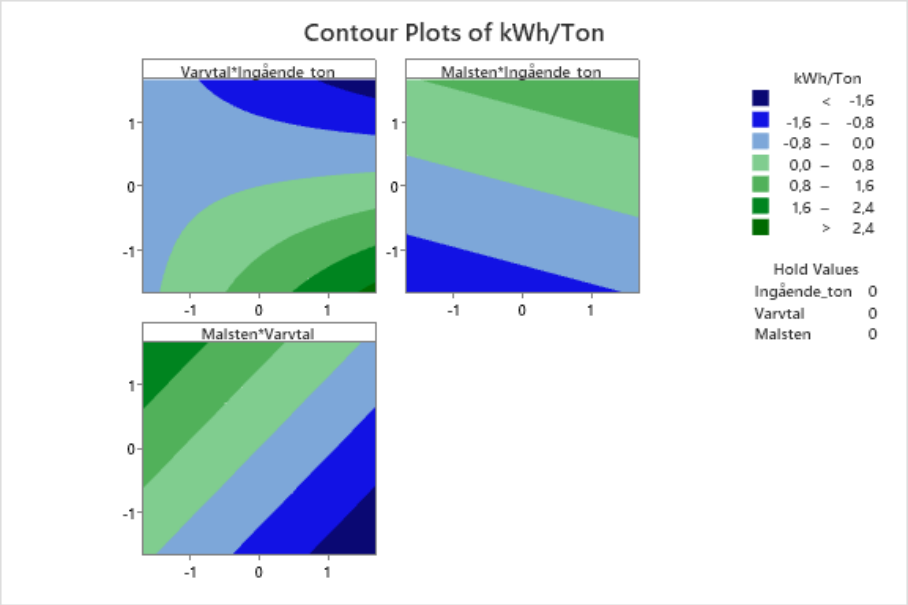
Huvudeffekter



Figur J6: Visualisering av huvudeffekterna på responsvariabeln *kWh/Ton*.

Figur J6 visar huvudeffekterna av faktorerna på responsvariabeln *kWh/Ton*. Eftersom det finns en signifikant interaktion mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*, bör dessa huvudeffekter inte tolkas utan hänsyn till interaktionen.

Konturplottar

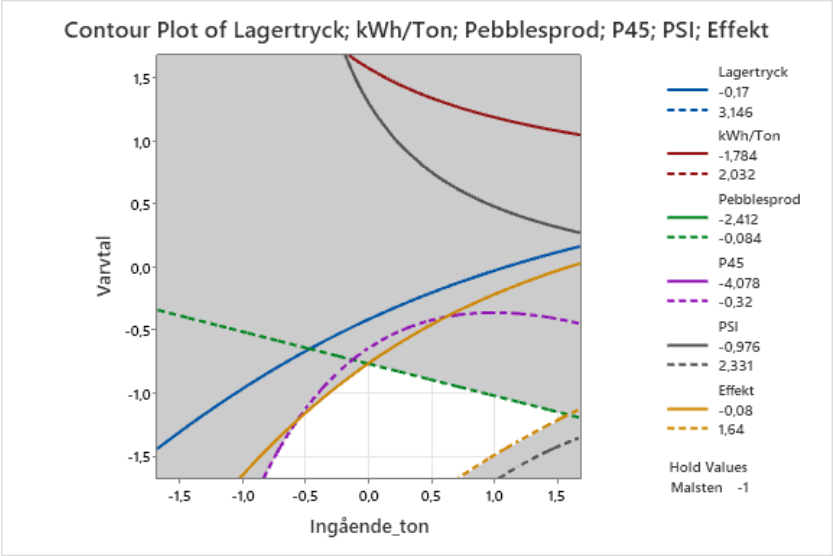


Figur J7: Konturplot för responsvariabeln *kWh/Ton*.

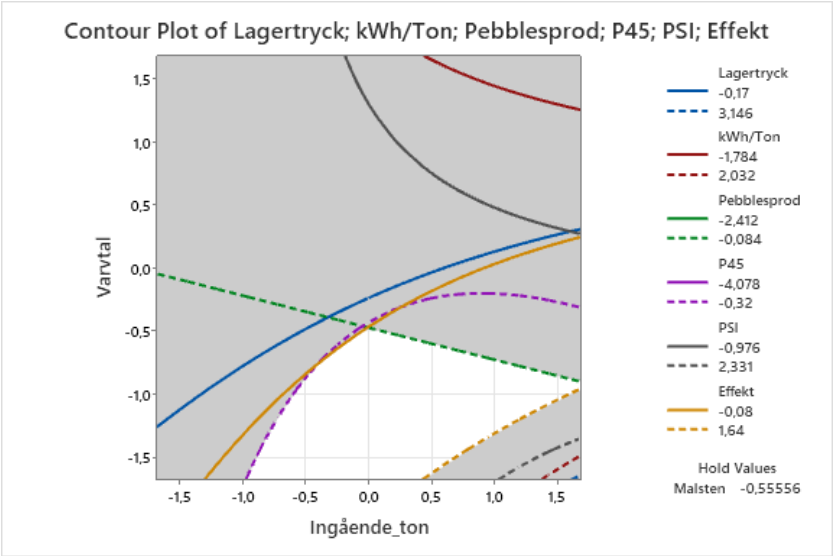
I figur J7 visas konturplottar för responsvariabeln *kWh/Ton* mellan alla tre faktorer. Notera att det enbart finns en signifikant interaktion mellan *Ingående tonnage* och *Varvtal*, varav icke-linjära konturlinjer kan observeras.

Bilaga K: Kompletterande figurer för *Maximera produktionen*

Grövre malning

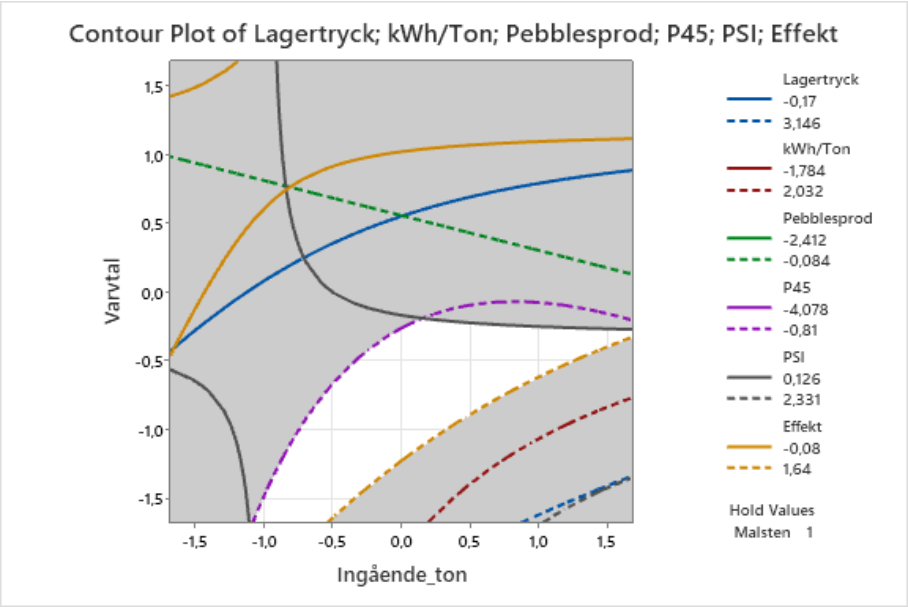


Figur K1: Överlagd konturplott för grövre malning med $Malstenskvot = -1$, och gränser enligt tabell (10).

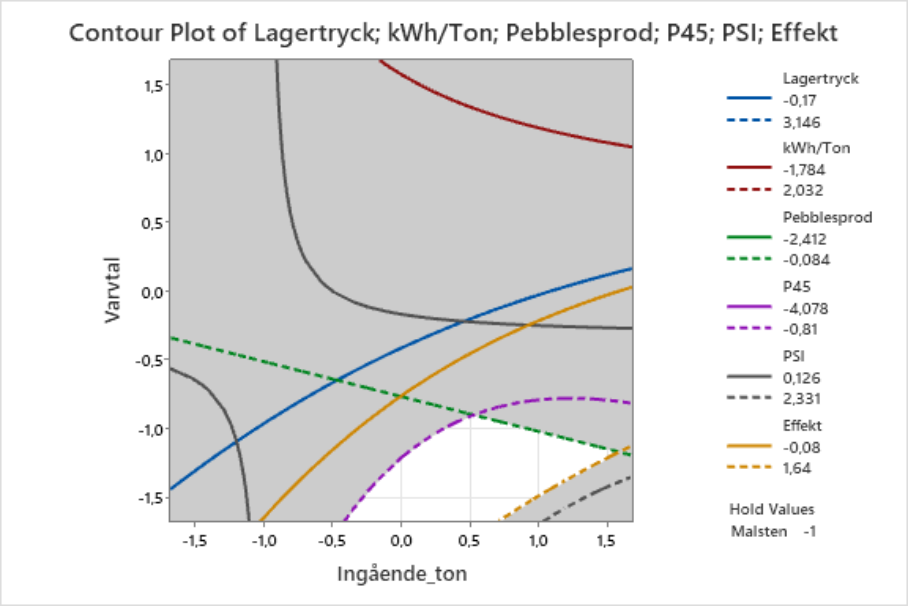


Figur K2: Överlagd konturplott för grövre malning vid $Malstenskvot = -0.56$, med gränser enligt tabell (10).

Finare malning



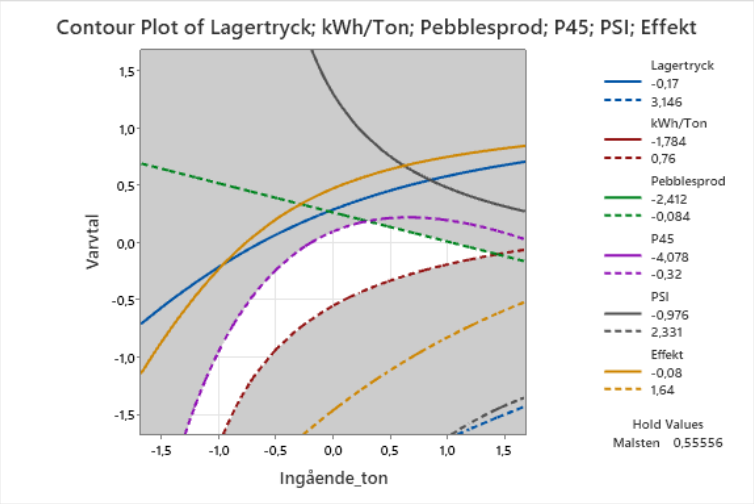
Figur K3: Överlagd konturplott för finare malning vid $Malstenskvot = +1$, med gränser enligt tabell (10).



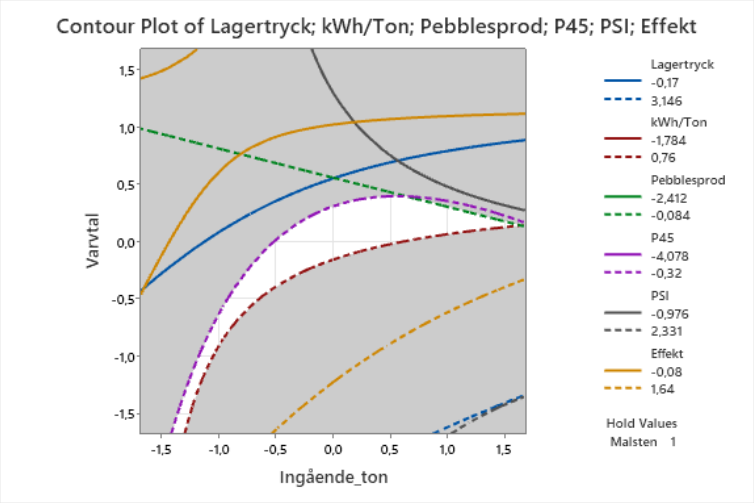
Figur K4: Överlagd konturplott för finare malning vid $Malstenskvot = -1$, med gränser enligt tabell (10).

Bilaga L: Kompletterande figurer för *Minimera specifika energiförbrukningen*

Grövre malning

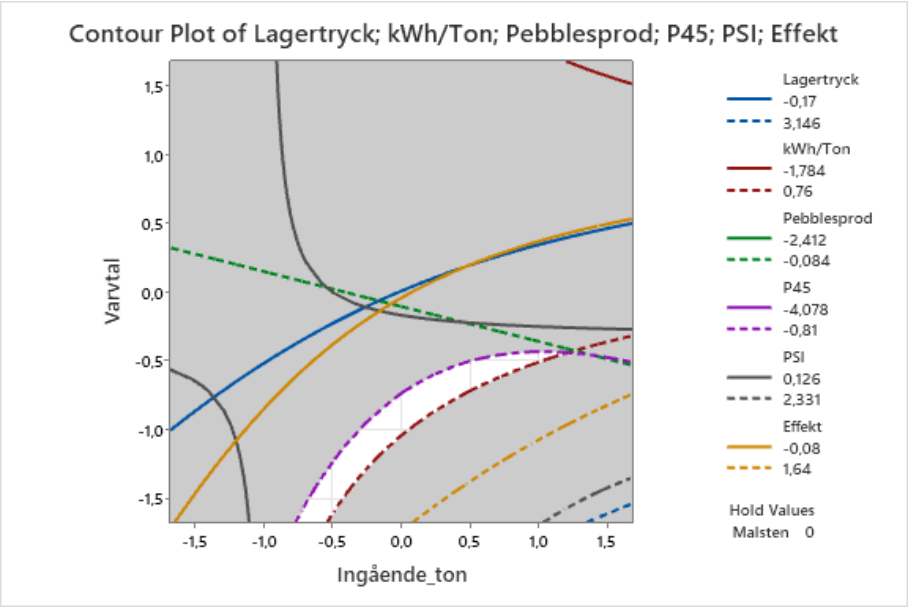


Figur L1: Överlagd konturplott för grövre malning vid $Malstenskvot = +0.56$, med gränser enligt tabell (11).

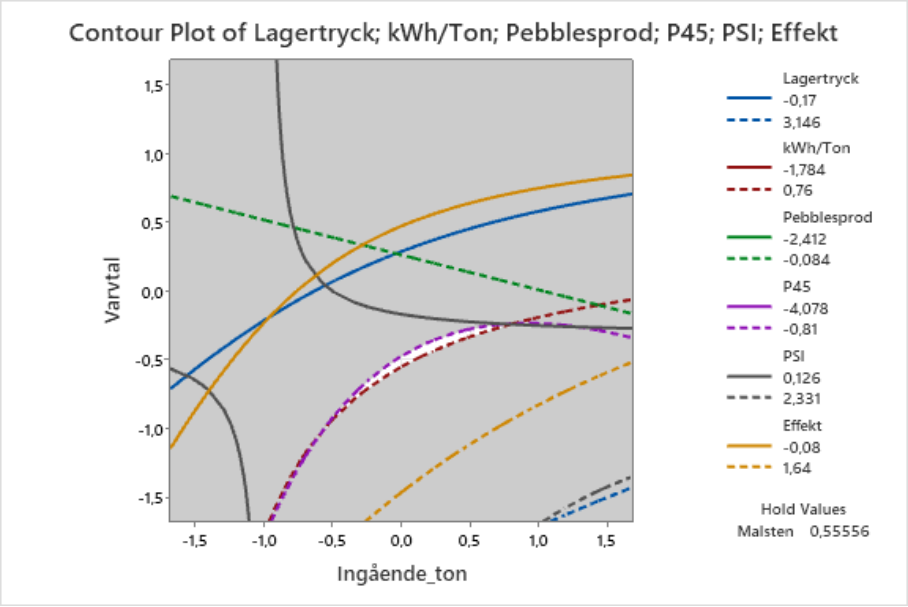


Figur L2: Överlagd konturplott för grövre malning vid $Malstenskvot = +1$, med gränser enligt tabell (11).

Finare malning



Figur L3: Överlagd konturplott för finare malning vid $Malstenskvot = 0$, med gränser enligt tabell (11).



Figur L4: Överlagd konturplott för finare malning vid $Malstenskvot = +0.56$, med gränser enligt tabell (11).